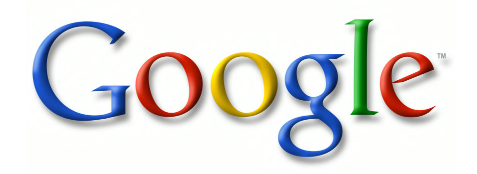
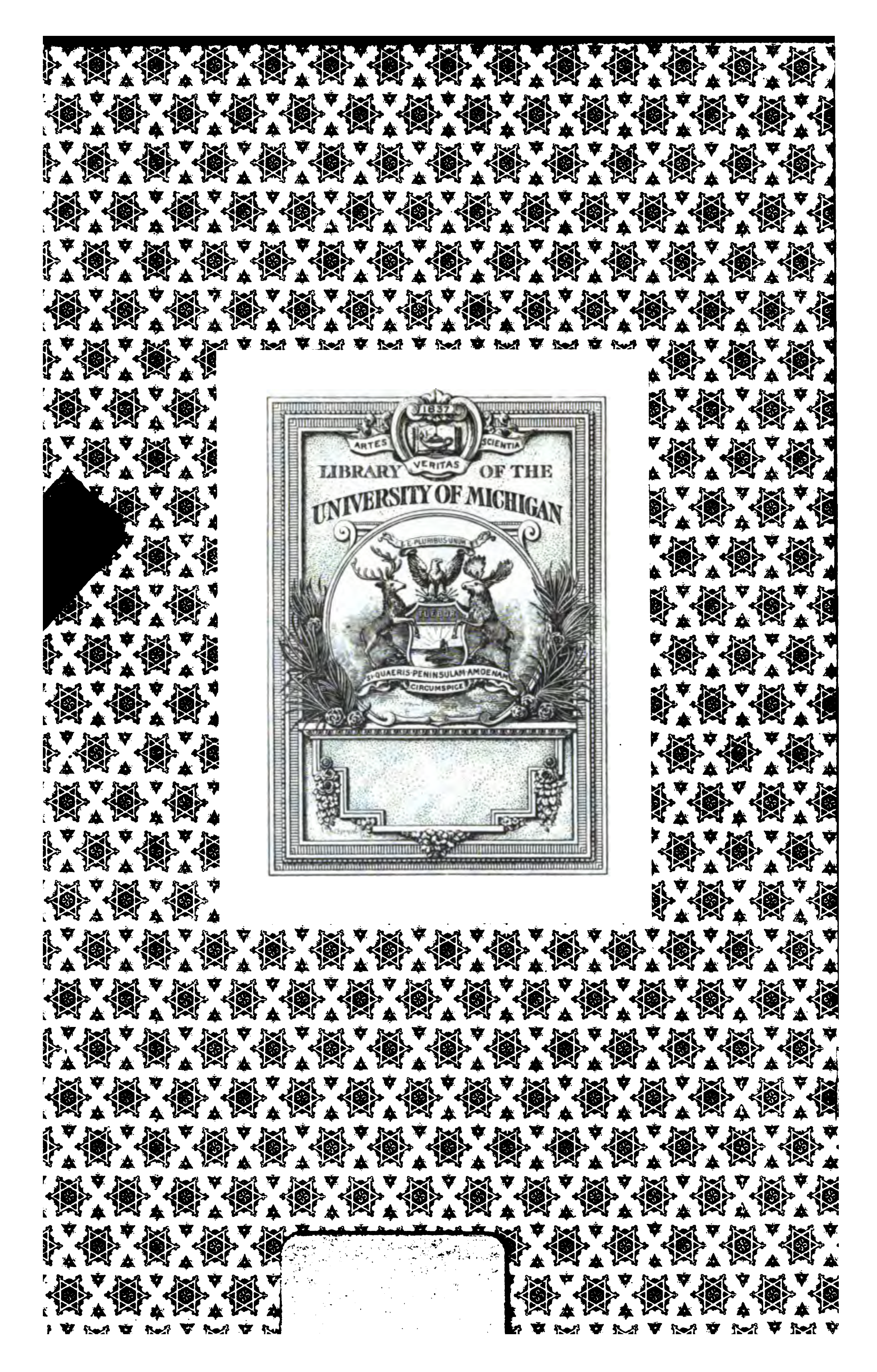
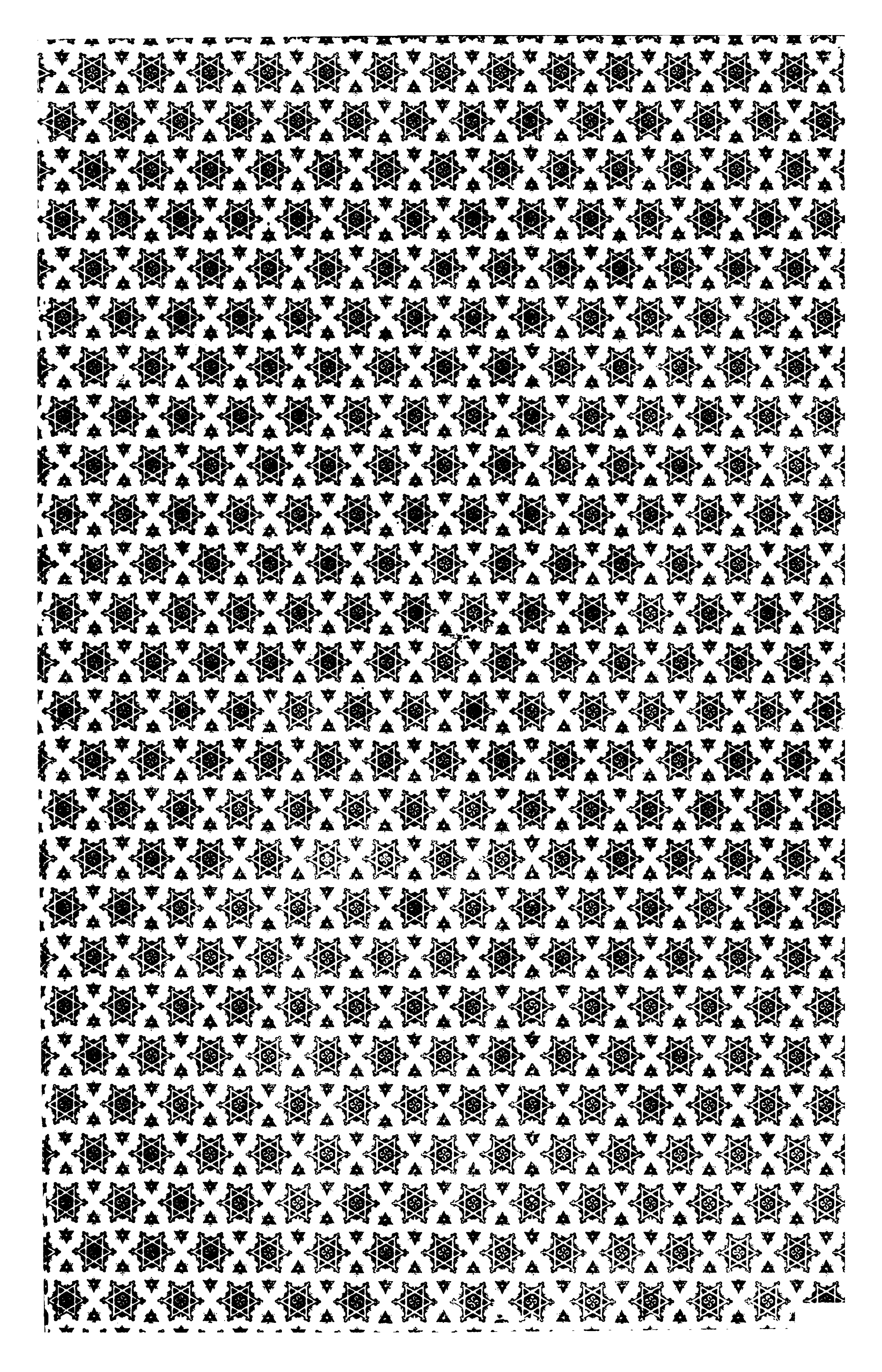




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

ERSTER THEIL.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ERSTER THEIL.

MIT 45 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

VORWORT.

Die hier gebotene Darstellung der Grundsätze der Differential- und Integralrechnung ist in erster Linie für die Studirenden an technischen Hochschulen bestimmt. Sie soll denselben eine Erleichterung in der Auffassung der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, aber keinen Ersatz dieser Vorlesung bieten. Es erscheint hier nur mehr der wesentlichste Gedankeninhalt jener Vorlesung in knapper, jedoch sachlich ziemlich vollständiger Form zusammengetragen. Alle näheren Darlegungen und zumal fast alle Ausführungen an Beispielen bleiben der Vorlesung selber vorbehalten.

Die Strenge in den Begriffsbildungen und den Beweisführungen habe ich so weit getrieben, als sie mir zweckmässig und durchführbar schien. Dass vereinzelte Wendungen dem scharfen Urtheil nicht genehm erscheinen werden, weiss ich sehr wohl; doch darf ich zur Entschuldigung auf den Zweck hinweisen, dem der Leitfaden dienen soll.

Das vorliegende erste Heft umfasst den Stoff, welcher in der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung während des ersten Semesters zu bewältigen ist. Die Anordnung ist so gewählt, dass zu Beginn des zweiten Semesters die Vorlesungen über technische Mechanik ungehindert einsetzen können.

Es ist für das Verständniss der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung von grundlegender Wichtigkeit, die zu entwickelnden abstracten Vorstellungen, wo es immer angeht, durch anschauliche Beispiele zu beleben. Die Geometrie der Curven und für die späteren Theile diejenige der Oberflächen bieten hier eine fast unerschöpfliche Fundgrube zweckmässiger Beispiele. Hierbei handelt es sich um Anschauungen, die allen Zuhörern gleichmässig zugänglich sind, und die ohnehin durch die gleichzeitigen geometrischen Vorlesungen befördert werden.

In den mathematischen Vorlesungen der späteren Semester wird man entsprechend die bis dahin entwickelten technischen Vorlesungen für die Auswahl von Beispielen verwerthen. Wollte man dies bereits im ersten Semester bei der Grundlegung der Differentialrechnung versuchen, so würde bei der Zusammensetzung der Zuhörerschaft dadurch aus nahe liegenden Gründen das Verständniss der Vorlesung nicht unerheblich erschwert werden.

Braunschweig, im December 1896.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

I. Capitel.

Einleitung in die Differentialrechnung.

II. Capitel.

Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Function $f(x)$.

III. Capitel.

Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

IV. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$.

V. Capitel.

Betrachtung des Verlaufes ebener Curven.

VI. Capitel.

Grundlagen der Integralrechnung.

VII. Capitel.

Theorie der unendlichen Reihen.

VIII. Capitel.

Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ... sich darstellenden Functionswerthe.

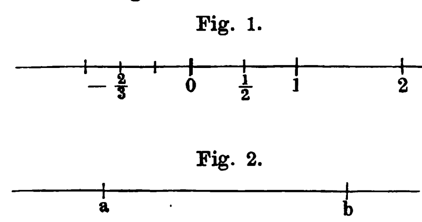
I. Capitel.

Einleitung in die Differentialrechnung.

1. Veränderliche und unveränderliche Grössen.

Erklärung: *Eine Grösse, welche im Laufe der Zeit verschiedene Werthe annimmt, heisst eine veränderliche oder variabele Grösse oder kurz eine „Variabele"; man bezeichnet solche Variabele in der Regel durch die letzten Buchstaben des Alphabets, wie x, $y \dots$, X, $Y \dots$, ξ, $\eta \dots$ Eine Grösse, welche im Laufe der Zeit ihren Zahlwerth beibehält, heisst eine unveränderliche oder constante Grösse oder kurz eine „Constante"; zur Bezeichnung von Constanten bedient man sich meist der Anfangsbuchstaben des Alphabets a, $b \dots$, A, $B \dots$, α, $\beta \dots$*

Zur geometrischen Deutung constanter oder variabeler Grössen dient die sogenannte *Zahlenlinie*, d. i. eine Gerade, deren Punkte, wie Fig. 1 andeutet, als Bilder der ganzen Zahlen, sowie der rationalen und irrationalen Brüche gelten.



Eine Variabele x heisst *unbeschränkt variabel*, falls sie jeden möglichen Werth annehmen kann, falls also ihr Bildpunkt auf der Zahlenlinie an jede Stelle derselben gelangen kann. Wird dagegen die Variabele x niemals kleiner als eine Zahl a und niemals grösser als eine Zahl b, die $> a$ ist, so schreibt man:

$$a \leqq x \leqq b$$

und bezeichnet die in Fig. 2 angedeutete Strecke der Zahlenlinie von a bis b als *das Intervall der Variabelen x.*

2. Begriff der Functionen und geometrische Deutung derselben.

Erklärung: *Sind zwei Variabele x und y derart an einander gebunden, dass bei Veränderungen von x sich die Variabele y „nach einem*

festen Gesetz" mitändert, so heisst y eine „Function" von x. Man sieht das zwischen x und y bestehende Verhältniss so an, dass man x als die „unabhängige" Variabele auffasst, die Function y von x aber als die „abhängige".

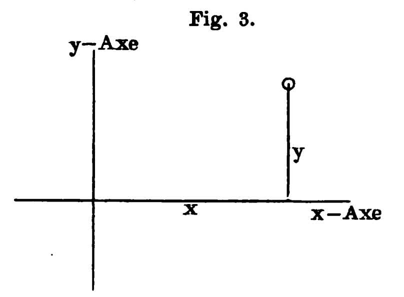
Der Begriff der Function ist der wichtigste in den Anwendungen der höheren Mathematik vorkommende Fundamentalbegriff, und auf die Functionen beziehen sich die Operationen der Differential- und Integralrechnung.

Die für die Rechnung geeignetste Art der *Angabe einer Function* ist diejenige *vermöge einer Gleichung*, wie z. B.:

$$y = 2x + 7 \quad \text{oder} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Will man bei einer auf eine oder mehrere Functionen bezogenen Betrachtung unentschieden lassen, um welche besonderen Functionen es sich handelt, so bedient man sich der *symbolischen Schreibweise* $y = f(x)$ oder $y = g(x)$, oder auch $y = F(x)$, $= \varphi(x)$ und dergl. mehr. Man spricht dann kurz von einer „Function $f(x)$" oder einer „Function $g(x)$" u. s. w. und bezeichnet die unabhängige Variabele x auch wohl als das *Argument* der Function $f(x)$ etc.

Fig. 3.



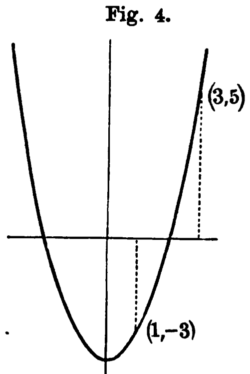
Ist die Gleichung, durch welche man eine Function giebt, noch nicht nach y aufgelöst, so spricht man von einer *unentwickelten oder impliciten Angabe der Function* und nennt in abgekürzter Sprechweise für diesen Fall wohl auch die Function selbst eine *unentwickelte* oder *implicite*. Als Beispiel diene die durch die Gleichung:

$$y^2 - x - 6y + 11 = 0$$

gegebene Function y von x. Die gleiche Function ist als *explicite*, d. i. *entwickelte Function* definirt oder kurz *explicite* gegeben durch die Gleichung:

$$y = 3 + \sqrt{x - 2}.$$

Fig. 4.



Als symbolische Schreibweisen impliciter Functionen dienen Gleichungen der Gestalt $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ u. s. w.

Um eine *geometrische Versinnlichung der Functionen* zu gewinnen, benutzt man für gewöhnlich ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene, wie es in der analytischen Geometrie gebräuchlich ist. Der einzelne Punkt der Ebene bekommt eine *Abscisse* x und eine *Ordinate* y (vergl. Fig. 3), die wir auch zusammenfassend die *Coordinaten* x, y

des Punktes nennen. Alle Punkte, deren Coordinaten x, y eine Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ befriedigen, bilden eine in der Ebene gelegene *Curve*, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird.

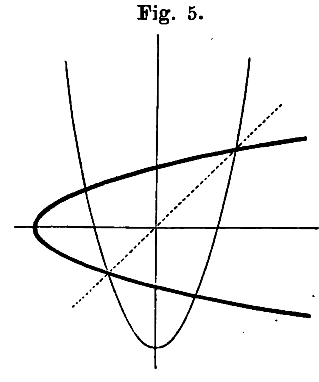
Lehrsatz: *Deutet man x und y als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so stellt die Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ eine in dieser Ebene gelegene Curve dar; diese Curve benutzt man als geometrisches Bild der durch $y = f(x)$ bezw. $F(x, y) = 0$ gegebenen Function.*

So ist z. B. in Fig. 4 die Curve gezeichnet, welche das geometrische Bild der Function $y = x^2 - 4$ ist. Für einige Punkte sind in der Figur die Werthe der Coordinaten in Klammern hinzugesetzt.

3. Inversion oder Umkehrung der Functionen.

Sieht man in der Gleichung $y = f(x)$ nicht wie bisher x, sondern y als die unabhängige Variabele an, so wird x eine Function von y sein. Dieser Auffassung entspricht man dadurch, dass man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst, was $x = \varphi(y)$ geben mag. Hier nehmen wir, damit fortan wieder x als Benennung der unabhängigen Variabelen diene, einen Austausch in der Bezeichnung beider Variabelen vor.

Fig. 5.



Man wird so zur Function $y = \varphi(x)$ geführt, welche die zu $f(x)$ „inverse" oder „umgekehrte" Function heisst. Der Process des Ueberganges von $f(x)$ zu $\varphi(x)$ heisst entsprechend „Inversion" oder „Umkehrung" der Function $f(x)$.

Das Verhältniss von $f(x)$ zur inversen Function $\varphi(x)$ ist ein gegenseitiges, d. h. zu $\varphi(x)$ ist wiederum $f(x)$ invers.

Zu einander invers sind z. B. die Functionen $f(x) = x^n$ und $\varphi(x) = \sqrt[n]{x}$ oder $f(x) = x^2 - 1$ und $\varphi(x) = \sqrt{x + 1}$ u. s. w.

Geometrisch vollzieht sich der Process der Inversion durch eine solche Umlegung der xy-Ebene, dass die positive x-Axe auf die positive y-Axe zu liegen kommt und umgekehrt; weiter hat man dann noch die Bezeichnungen x und y auszuwechseln. Diese Maassregel kommt hinaus auf folgenden

Lehrsatz: *Um aus der Curve einer Function $f(x)$ das geometrische Bild der inversen Function $\varphi(x)$ zu gewinnen, hat man jene Curve um die Halbirungslinie des von der positiven x-Axe und der positiven y-Axe gebildeten Winkels umzuklappen.*

Für die in Fig. 4 dargestellte Curve der Function $(x^2 - 4)$ ist diese Operation in Fig. 5 ausgeführt; die neue Curve, welche somit der Function $\sqrt{x + 4}$ zugehört, ist stärker ausgezogen. Man

bemerkt, dass hier zu jeder Abscisse $x > -4$ zwei einander genau entgegengesetzte Ordinaten y gehören. Dies entspricht dem Umstande, dass wir die Quadratwurzel $\sqrt{x+4}$ sowohl mit dem positiven wie negativen Zeichen versehen dürfen. Die hierin liegende Zweideutigkeit kommt in der Formel $y = \pm\sqrt{x+4}$ direct zum Ausdruck.

4. Die rationalen und die irrationalen Functionen.

I. Eine der einfachsten Functionen, welche man bilden kann, ist die *Potenz* $y = x^n$ mit ganzem positiven Exponenten n.

Multiplicirt man x^n mit der Constanten a und bildet die Summe mehrerer solcher Producte, wie z. B.

$$y = ax^n + bx^m + cx^l,$$

so gewinnt man eine *„ganze rationale Function"*.

Der höchste hierbei auftretende Exponent von x heisst der *Grad der ganzen Function.* Ist der Grad $= 1$, so spricht man auch von einer *linearen* ganzen Function.

Eine ganze rationale Function wird „geordnet", indem man die Glieder mit gleichen Potenzen von x zusammenfasst und sodann alle Glieder nach ansteigenden Potenzen von x anordnet.

Lehrsatz: *Eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x hat die geordnete Gestalt:*

$$(1) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante Coëfficienten sind.

II. Bildet man den Quotienten zweier ganzen rationalen Functionen oder auch die Summe mehrerer solcher Quotienten, so entsteht eine *gebrochene rationale Function* oder eine *„rationale Function"* schlechthin.

Man „ordnet" eine rationale Function, indem man für die als Nenner auftretenden ganzen Functionen den Generalnenner bildet, die verschiedenen Brüche addirt und sodann die beiden hierbei oberhalb und unterhalb des Bruchstriches auftretenden ganzen rationalen Functionen ordnet.

Lehrsatz: *Eine rationale Function von x hat die geordnete Gestalt:*

$$(2) \qquad y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$

wo die a und b constante Coëfficienten sind. Die grössere unter den beiden Zahlen oder, falls beide gleich sind, eine von ihnen liefert den Grad der rationalen Function.

Ist der Grad $= 1$, so spricht man auch von einer *linearen* Function.

III. Die einfachste *„irrationale Function"* von x ist $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Ein complicirteres Beispiel einer irrationalen Function von x ist die n^{te} Wurzel aus einer beliebigen rationalen Function von x. Allgemein gilt folgende

Erklärung: *Man spricht von einer irrationalen Function von x, wenn zur Berechnung des Werthes der Function neben rationalen Rechnungsarten noch eine oder mehrere Wurzelziehungen auszuüben sind.*

Beispiele irrationaler Functionen sind:

$$y = \sqrt[3]{ax + b}, \quad y = \sqrt[n]{\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}} \text{ u. s. w.}$$

5. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Functionen.

Erklärung: *Eine Function $y = f(x)$ heisst für einen speciellen Werth x n-deutig, wenn die durch den Ausdruck von $f(x)$ gegebene Vorschrift zur Berechnung von y für jenen Werth von x im Ganzen n verschiedene Werthe y als zugehörig liefert.*

So ist z. B. die Function $y = \sqrt{x - 1}$ für alle x, die > 1 sind, zweideutig, da man die Quadratwurzel sowohl mit positivem als negativem Zeichen versehen kann. Für $x = 1$ ist die Function $\sqrt{x - 1}$ eindeutig, für $x < 1$ nulldeutig, d. h. die durch $f(x)$ gegebene Rechenvorschrift führt hier auf keinen reellen Werth y.

Ist $y = f(x)$ für einen besonderen Werth x n-deutig, so liefert die zu $f(x)$ gehörende Curve für die Abscisse x im ganzen n Ordinaten y (vergl. Fig. 5, S. 3).

Lehrsatz: *Die rationalen Functionen sind für alle Werthe des Argumentes x eindeutig. Die irrationalen Functionen liefern Beispiele mehrdeutiger Functionen.*

6. Exponentialfunction und Logarithmus.

I. Ist a eine positive Zahl, so hat a^x für jeden Werth x einen bestimmten *positiven* Werth.

Erklärung und Lehrsatz: *Die Function $y = a^x$ mit positivem a heisst „Exponentialfunction" der Basis a. Die Exponentialfunction ist für jeden Werth x eindeutig und hat beständig positiven Zahlwerth.*

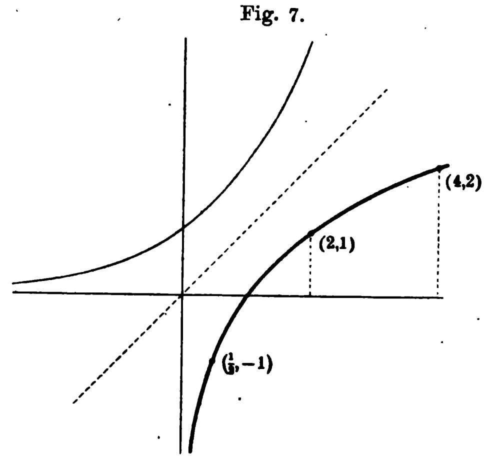
Fig. 6.

In der Regel ist $a > 1$. Als Beispiel diene $a = 2$, wo die *Exponentialfunction* den in Fig. 6 angegebenen Verlauf zeigt. An einzelnen Punkten der Curve sind die zugehörigen Werthe der Coordinaten in Klammern beigefügt.

II. Erklärung: *Die zur Exponentialfunction inverse Function ist $y = {}^a\log x$ und heisst „Logarithmus" der Basis a.*

Die aus Fig. 6 nach der Regel von S. 3 hergestellte *Logarithmuscurve* für $a = 2$ ist in Fig. 7 durch stärkeres Ausziehen hervorgehoben.

Fig. 7.



Lehrsatz: *Die Function $y = {}^a\log x$ ist für alle positiven x eindeutig, für alle negativen x nulldeutig.*

Dies tritt in Fig. 7 direct hervor: Die Logarithmuscurve verläuft durchaus rechts von der y-Axe und liefert hierselbst für jedes x ein und nur ein y.

Ist $a > 1$, so gelten die Formeln:

(1) $${}^a\log(0) = -\infty, \quad {}^a\log(1) = 0, \quad {}^a\log(+\infty) = +\infty.$$

7. Gradmaass und Bogenmaass der Winkel.

Statt des in der Trigonometrie gebräuchlichen Gradmaasses der Winkel benutzt man in der höheren Mathematik gewöhnlich das sogen. Bogenmaass der Winkel.

Erklärung: *Ein Winkel wird gemessen durch die Länge desjenigen Kreisbogens vom Radius 1, zu welchem der Winkel als Centriwinkel gehört.*

Hat ein Winkel von α Grad in Bogenmaass die Grösse s (vergl. Fig. 8, folg. Seite), so gilt die Formel:

(1) . . . . $$s = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Tabelle:

α	1^0	90^0	180^0	270^0	360^0
s	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Will man s als unbeschränkte Variabele auffassen, so legt man an Stelle des Kreises vom Radius 1 zur geometrischen Deutung von s eine „Zahlenlinie" (vergl. S. 1) zu Grunde, auf welcher man den Kreis des Radius 1 nach der positiven und negativen Seite unendlich oft abgewickelt denkt.

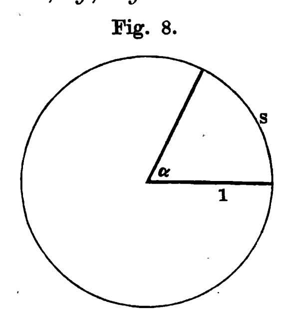
Lehrsatz: *Bei der letzteren Auffassung gewinnt ein und derselbe geometrisch gegebene Winkel unendlich viele Maasszahlen s, welche alle aus einer unter ihnen durch Zufügen beliebiger Multipla von 2π entstehen.*

So bekommt ein rechter Winkel die Maasszahlen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 4\pi$, ...

8. Die trigonometrischen Functionen.

Erklärung: *Als Argument der trigonometrischen Functionen sin, cos, tg, ctg wird nicht die Gradzahl, sondern das Bogenmaass s eines Winkels angesehen. Um s als variabel zu charakterisiren, schreiben wir x statt s und legen zur Deutung der Werthe $s = x$ sogleich die Zahlenlinie (x-Axe) zu Grunde.*

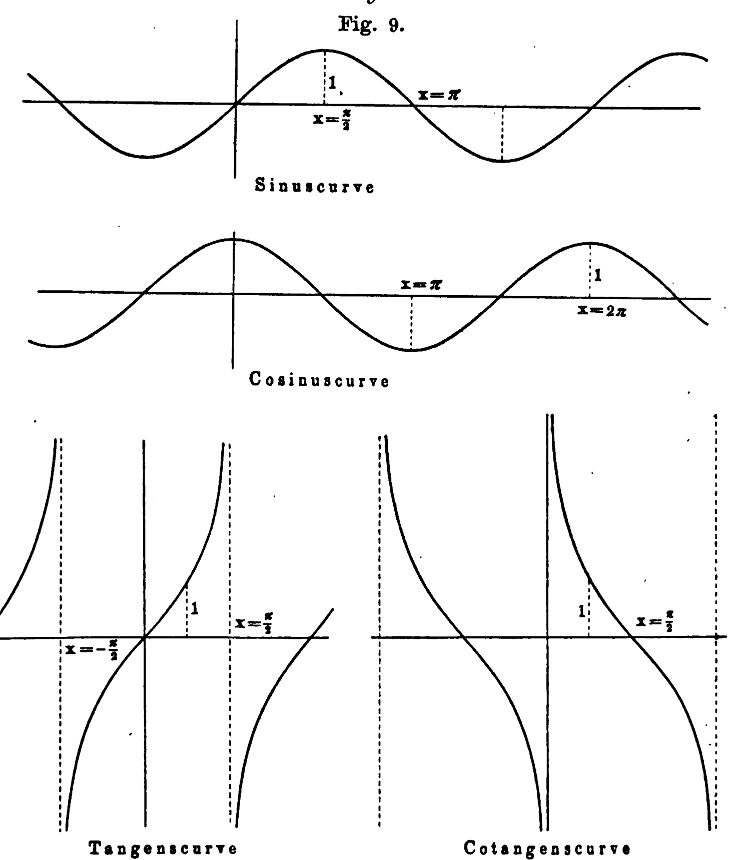
Fig. 8.



Den vier Functionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$ entsprechen ebenso viele „*trigonometrische Curven*", welche in Fig. 9 zusammengestellt sind.

Lehrsatz: *Die trigonometrischen Functionen sind für jeden Werth des Argumentes x eindeutig.*

Fig. 9.



In den Figuren kommt dies dadurch zum Ausdruck, dass für jeden Werth x durch die einzelne Curve ein und nur ein y geliefert wird.

Zwei Werthe x, welche um ein Multiplum von 2π verschieden sind, liefern dieselben Winkel und also gleiche Werthe der Functionen.

Lehrsatz: *Die trigonometrischen Functionen heissen periodische Functionen, weil sie ihren Werth nicht ändern, falls man das Argument x um 2π vermehrt oder vermindert.*

Die Functionen $tg\,x$ und $ctg\,x$ bleiben auch bereits bei Vermehrung oder Verminderung des Argumentes x um π unverändert, während $sin\,x$ und $cos\,x$ hierbei das Zeichen wechseln:

(1) . . $sin\,(x \pm \pi) = -\,sin\,x, \quad cos\,(x \pm \pi) = -\,cos\,x,$

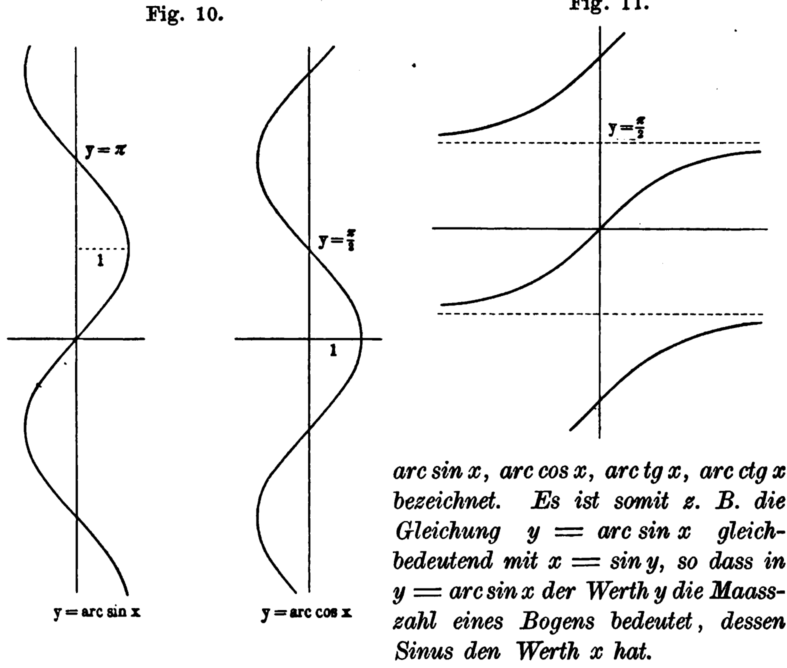
(2) . . $tg\,(x \pm \pi) = tg\,x, \quad ctg\,(x \pm \pi) = ctg\,x.$

Man benennt dieserhalb 2π als die „*Periode*“ von $sin\,x$ und $cos\,x$, π als diejenige von $tg\,x$ und $ctg\,x$.

9. Die cyklometrischen Functionen.

Erklärung: *Die den vier trigonometrischen Functionen inversen Functionen heissen die „cyklometrischen“ Functionen und werden durch*

Fig. 10. Fig. 11.



$arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$, $arc\,tg\,x$, $arc\,ctg\,x$ bezeichnet. Es ist somit z. B. die Gleichung $y = arc\,sin\,x$ gleichbedeutend mit $x = sin\,y$, so dass in $y = arc\,sin\,x$ der Werth y die Maasszahl eines Bogens bedeutet, dessen Sinus den Werth x hat.

Die vier *cyklometrischen Curven* entspringen aus denen der Fig. 9 nach der S. 3 angegebenen Regel. Fig. 10 liefert die Curven für $arc\,sin\,x$ und $arc\,cos\,x$, Fig. 11 die für $arc\,tg\,x$.

Aus den Figuren entspringt folgender

Lehrsatz: *Die Functionen $arc\sin x$ und $arc\cos x$ sind für die Werthe von x im Intervall von -1 bis $+1$ unendlich-vieldeutig, ausserhalb dieses Intervalles aber stets nulldeutig. Die Functionen $arc\,tg\,x$ und $arc\,ctg\,x$ sind für jeden endlichen Werth von x unendlich vieldeutig.*

Unter den unendlich vielen Werthen, welche die Function $arc\sin x$ für ein dem Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ angehörendes x besitzt, wird als „*Hauptwerth*" derjenige Werth y angesehen, welcher dem Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$ angehört. Aus dem Hauptwerthe y berechnen sich alle übrigen Werthe der Function in den Gestalten:

$$y + 2\nu\pi \quad \text{und} \quad -y + (2\nu + 1)\pi,$$

wo beide Male ν alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen soll.

Der Hauptwerth y der Function $arc\,tg\,x$ soll gleichfalls dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ angehören; alle übrigen Werthe dieser Function sind dann in der Gestalt $(y + \nu\pi)$ enthalten.

Es gelten die Formeln:

$$(1) \quad \begin{cases} arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\sin x, \\ arc\,ctg\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,x. \end{cases}$$

10. Algebraische und transcendente Functionen.

Die vorstehend besprochenen Functionen sind sämmtlich bereits in der Elementarmathematik bekannt und heissen dieserhalb „*die elementaren Functionen*".

Erklärung: *Die unter Nr. 4 besprochenen rationalen und irrationalen Functionen nennt man zusammenfassend „die elementaren algebraischen Functionen"; die Exponentialfunction, der Logarithmus, die trigonometrischen und die cyklometrischen Functionen heissen „die elementaren transcendenten Functionen".*

11. Zusammengesetzte Functionen.

Erklärung: *Setzt man als Argument in die Function f nicht x, sondern die Function $\varphi(x)$ von x ein, so wird $f[\varphi(x)]$ selbst wieder eine Function von x, die wir abgekürzt $F(x)$ nennen wollen:*

$$(1) \quad y = F(x) = f[\varphi(x)]$$

und als eine „zusammengesetzte" Function von x bezeichnen.

Man sagt auch, es handle sich hier um „*eine Function einer Function*" von x.

Beispiele zusammengesetzter Functionen liefern bereits die S. 4 betrachteten irrationalen Functionen; in $y = \sqrt[3]{ax + b}$ ist zunächst



die lineare Function $\varphi(x) = ax + b$ zu bilden und dann die dritte Wurzel zu ziehen.

Man kann auch weitergehen und $f[\varphi(x)]$ als Argument in eine Function Φ einsetzen u. s. w. Ein Beispiel ist:

$$y = \sin [\log (ax + b)].$$

12. Der Begriff der Grenze.

Erklärung: *Will man bei einer (positiven oder negativen) Zahl a vom Vorzeichen absehen, so sagt man, die Zahl a solle „absolut genommen" werden; der hierbei sich ergebende „absolute Betrag" der Zahl a wird durch $|a|$ bezeichnet.*

Setzt man:

$$(1) \quad \ldots \quad a_1 = 0{,}3, \quad a_2 = 0{,}33, \quad a_3 = 0{,}333, \ldots,$$

so kann man ein a_n mit so grossem Index n angeben, dass sowohl a_n wie alle folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots$ von dem Werthe $^1/_3$ so wenig, als man will, verschieden sind. Dieserhalb heisst $^1/_3$ die „*Grenze*" der Zahlenreihe (1).

Etwas genauer lässt sich dasselbe Sachverhältniss so aussprechen: Wählt man eine beliebig kleine Zahl δ, die jedoch > 0 sein soll, so lässt sich eine zu diesem δ gehörende endliche ganze Zahl n angeben, so dass für alle Indices $m \geqq n$ die Ungleichung $|^1/_3 - a_m| < \delta$ gilt.

Erklärung: *Es sei irgend eine unendliche Zahlenreihe:*

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$$

vorgelegt und es existire eine endliche Zahl g von folgender Art: Nach Auswahl einer „beliebig" kleinen Zahl δ, die jedoch > 0 ist, soll es stets einen zu diesem δ gehörenden endlichen Index n geben, so dass für $m \geqq n$ der absolute Betrag $|g - a_m| < \delta$ ist. Kann wirklich eine solche Zahl g angegeben werden, so heisst sie die „Grenze" oder der „Limes" der Zahlenreihe (2) und wird durch:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad g = \lim_{n=\infty} a_n$$

bezeichnet.

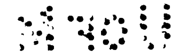
Zusatz: *Ist die Zahlenreihe (2) so beschaffen, dass nach Auswahl eines beliebig grossen, jedoch endlichen Betrages ω stets ein zugehöriges n angegeben werden kann, so dass für alle Indices $m \geqq n$ die Ungleichung $|a_m| > \omega$ gilt, so sagt man, die Zahlenreihe (2) besitze die Grenze ∞:*

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lim_{n=\infty} a_n = \infty.$$

Beispiel: Vermöge einer Zahl $q > 1$ bilde man die Reihe:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad a_1 = q, \quad a_2 = q^2, \quad a_3 = q^3 \ldots,$$

wobei $a_{n+1} > a_n$ allgemein gilt. Entweder existirt eine endliche Zahl $g = \lim_{n=\infty} a_n$ oder es ist $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.



Gesetzt, der erste Fall treffe zu, so ist für jedes endliche l nothwendig $a_l < g$. Nun kann man wegen $q > 1$ ein vorschriftsmässiges δ so wählen, dass

$$\delta < g\left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad \text{oder entwickelt} \quad q\,(g - \delta) > g$$

zutrifft. Dann lässt sich ein endlicher Index m angeben, so dass $g - a_m < \delta$ oder also $a_m > g - \delta$ ist. Durch Multiplication mit der positiven Zahl q folgt:

$$q\,a_m = a_{m+1} > q\,(g - \delta) > g,$$

so dass a_{m+1} bereits g übertrifft. Es ist somit $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lim\limits_{n=\infty} q^n = \infty$.

Ist $0 < r < 1$, so ist $\frac{1}{r} = q > 1$, und man hat:

$$r^n = \frac{1}{q^n}, \quad \text{sowie} \quad \lim_{n=\infty} r^n = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{q^n}\right) = 0.$$

Lehrsatz: *Ist $q > 1$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} q^n = \infty$. Ist $0 < r < 1$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} r^n = 0$.*

13. Stetigkeit einer Variabelen und stetige Annäherung an eine Grenze.

Erklärung: *Führt der Bildpunkt einer Variabelen x auf der Zahlenlinie irgend welche Bewegungen im gewöhnlichen Sinne des Wortes aus, so bezeichnet man die hierdurch gegebenen Veränderungen der Variabelen x als „stetige" oder nennt kurz x eine „stetige Variabele".*

Wächst eine stetige Variabele um einen endlichen Betrag oder nimmt sie um einen solchen ab, so wird sie *alle* zwischen dem Anfangs- und Endwerthe liegenden Zahlwerthe *in der natürlichen Folge* durchlaufen.

Die in Nr. 12 betrachtete Annäherung einer Zahlenreihe a_1, a_2, $a_3 \ldots$ an eine Grenze g heisst *„unstetig"*, weil hier sprungweise von der einzelnen Zahl a zur folgenden übergegangen wird.

Dem gegenüber gilt folgende

Erklärung: *Man spricht von einer „stetigen" Annäherung der Variabelen x an eine endliche Grenze g, falls x solche stetige Veränderungen erfährt, dass nach Auswahl einer beliebig kleinen Grösse δ, die jedoch > 0 sein soll, im Laufe der Veränderung des x die Ungleichung $|g - x| < \delta$ richtig wird und weiterhin richtig bleibt.*

Eine stetige Variabele x kann zufolge der Definition den Werth ∞ nicht annehmen. Indessen kann man mit x solche stetige Veränderungen vornehmen, dass nach Auswahl einer beliebig grossen aber endlichen Zahl ω im Laufe der Veränderung des x die Ungleichung $x > \omega$ richtig wird und weiterhin richtig bleibt. Man spricht dann von *einer stetigen Annäherung des x an die Grenze ∞.*

In diesem Falle wird sich der reciproke Werth $\frac{1}{x}$ stetig der Grenze 0 annähern.

14. Einführung der Zahl e.

Sind a und b irgend zwei den Bedingungen:

(1) . . . . $a > b > 0$

genügende Zahlen und ist n eine positive ganze Zahl, so gilt:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n < (n+1)a^n.$$

Hieraus folgt:

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)(n + 1)\,a^n,$$

sowie weiter durch Transposition:

(2) . . . . . $a^n\,[a - (a - b)(n + 1)] < b^{n+1}$.

Setzen wir in (2) die mit (1) in Uebereinstimmung befindlichen Werthe:

$$a = 1 + \frac{1}{n}, \quad b = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ein, so ergiebt sich:

(3) . . . . . $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Setzt man aber die wieder in Uebereinstimmung mit (1) gewählten Werthe:

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1$$

in (2) ein, so ergiebt sich:

(4) . $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 1$ und also $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$.

Setzt man nunmehr $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, so folgt aus (3), dass in der Reihe der positiven Zahlen $a_1 = 2, a_2, a_3 \ldots$ jede folgende grösser als die voraufgehende ist, und aus (4), dass keine Zahl a_n den Betrag 4 erreicht.

Wir schliessen auf die Existenz einer Grenze $g = \lim_{n=\infty} a_n$, welche zwischen 2 und 4 gelegen ist. Diese Grenze trägt die besondere Bezeichnung e.

Lehrsatz: *Unter der Zahl e versteht man die Grenze der Zahlenreihe* $a_1, a_2, a_3 \ldots$, *wenn* a_n *den Zahlwerth* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *bedeutet:*

(5) . . . . $e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Die Zahl e ist irrational und angenähert gegeben durch:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad e = 2{,}718\,281\,8 \ldots$$

Ist x eine stetige Variabele, die > 1 und für den Augenblick von einer ganzen Zahl verschieden ist, so liege x zwischen den ganzen Zahlen n und $(n + 1)$. Aus $n < x < n + 1$ folgt:

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x$$

oder, wenn man die positiven *echten* Brüche $x - n = \sigma$, $n + 1 - x = \tau$ einführt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\sigma} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-\tau},$$

$$(7) \quad \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)}.$$

Nähert sich jetzt x der Grenze ∞, so wächst auch n über alle Grenzen, und es ist demnach $lim. \dfrac{\sigma}{n} = 0$ und $lim. \dfrac{\tau}{n+1} = 0$. In (7) werden somit die rechte und linke Seite übereinstimmend die Grenze e haben; der in der Mitte stehende Ausdruck hat also gleichfalls e zur Grenze.

Lehrsatz: *Auch wenn x als „stetige“ Variabele sich der Grenze ∞ nähert, gilt die Gleichung:*

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

15. Stetigkeit der Functionen.

Erklärung: *Eine Function $y = f(x)$ heisst stets dann „stetig“, wenn bei stetiger Veränderung des Argumentes x auch die Function y stetig variabel ist.*

Die Curve der Function $y = f(x)$ verläuft für alle Werthe x, für welche $f(x)$ stetig ist, *zusammenhängend.*

Die elementaren Functionen können nur für einzelne Werthe x aufhören, stetig zu sein. Findet dies für $y = f(x)$, z. B. bei $x = a$ statt, so sagt man, *die Function $f(x)$ werde bei $x = a$ unstetig.*

Man unterscheidet *zwei* Arten von Unstetigkeiten:

1. Da eine Variabele y, so lange sie stetig ist, nothwendig endlich ist, so wird eine Function $y = f(x)$ für alle diejenigen Werthe von x unstetig werden, für welche sie unendlich wird.

Man spricht in diesem Falle von einer *„Unstetigkeit durch Unendlichwerden“.* Von dieser Art ist die Unstetigkeit von $y = {}^a\!log\, x$ bei $x = 0$ (vergl. Fig. 7, S. 6).

Liegt für $x = a$ eine Unstetigkeit dieser ersten Art bei $y = f(x)$ vor, so wird y für *lim.* $x = a$ im Sinne des Schlusses von Nr. 13 als „stetige" Variabele sich der Grenze ∞ annähern. Es wird somit der reciproke Werth $\frac{1}{y}$, welcher für $x = a$ verschwindet, bei $x = a$ *stetig* bleiben. Als Beispiel diene die Function $y = \frac{1}{x - a}$.

2. Erleidet eine Function $y = f(x)$, falls das Argument als stetige Variabele den Werth $x = a$ passirt, eine plötzliche Werthänderung um einen endlichen Betrag, so sagt man, die Function $f(x)$ erfahre bei $x = a$ eine „*Unstetigkeit durch endlichen Sprung*".

Fig. 12.

In Fig. 12 ist diese Art der Unstetigkeit am Curvenverlauf versinnlicht.

Unstetigkeiten durch endliche Sprünge kommen zwar bei „zusammengesetzten" elementaren Functionen (S. 9) vor, spielen indessen weiterhin keine besondere Rolle. —

Bei manchen Functionen kann man sagen, dass sie für $x = \infty$ einen bestimmten Werth besitzen. Dies ist der Fall, wenn für *lim.* $x = \infty$ die Function y sich einer Grenze annähert, die auch ∞ sein kann.

So wird die Function $y = 2^x$ für $x = +\infty$ selber ∞, für $x = -\infty$ aber gleich 0 (vergl. Fig. 6, S. 5).

Die trigonometrischen Functionen nähern sich für *lim.* $x = \infty$ keiner Grenze an.

II. Capitel.

Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Function $f(x)$.

1. Der Differenzenquotient einer Function $f(x)$.

Es sei $y = f(x)$ eine „elementare" Function, und es seien x und x_1 irgend zwei endliche Argumente, die in einem solchen Intervall gelegen sind, in welchem $f(x)$ überall eindeutig und stetig ist.

Zu x und x_1 gehören die Werthe $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$ der Function. Wir führen alsdann die Differenzen ein:

(1) . . . . $x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y.$

Erklärung: *Der Quotient der Differenzen* Δy *und* Δx:

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

heisst Differenzenquotient der Function $f(x)$ *für das Argumentenpaar* x, x_1 *oder kurz „Differenzenquotient von* $f(x)$*"*.

Zur geometrischen Deutung des Differenzenquotienten markire man auf der zu $y = f(x)$ gehörenden Curve die Punkte P und P_1 der Coordinaten x, y und x_1, y_1 und versehe die Secante $\overline{PP_1}$ mit einem „nicht nach unten" gerichteten Pfeile.

Fig. 13.

Lehrsatz: *Der Differenzenquotient ist gleich* $tg\,\beta$, *wenn* β *der Winkel zwischen der Pfeilrichtung der Secante* $\overline{PP_1}$ *und der positiven Richtung der x-Axe ist.*

Fig. 13 erläutert dies in einigen Fällen.

2. Die Differentiale und der Differentialquotient einer Function $f(x)$.

Während x für den Augenblick festbleiben soll, möge sich x_1 als stetige Variabele der Grenze x annähern.

Dabei tritt für die Secante $\overline{PP_1}$ die *Tangente im Punkte P* an die Curve als Grenzlage ein. *Der Differenzenquotient aber nähert sich als stetige Veränderliche dem Werthe* $tg\,\alpha$ *an, wo* α *der Winkel zwischen der nicht nach unten gerichteten Curventangente im Punkte P und der positiven Richtung der x-Axe ist* (vergl. Fig. 14, a. f. S.).

Der vorliegende Grenzprocess soll so vollzogen werden, dass die veränderliche Differenz Δx, und damit auch Δy, sich *als stetige Variabele* der Grenze 0 nähert, *ohne mit 0 identisch zu werden.*

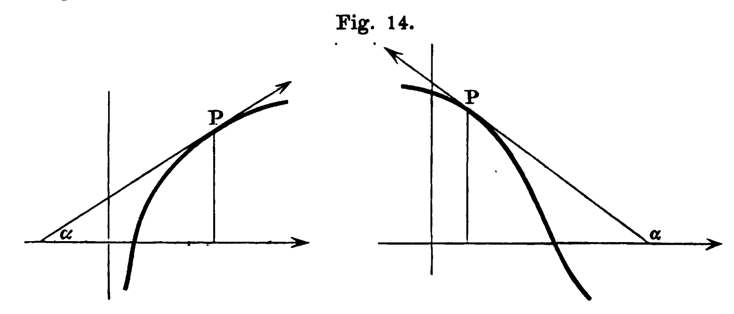
Es werden somit Δx und damit Δy *ohne Ende klein* oder, wie man kurz sagt, *„unendlich klein"*.

Erklärung: *Um die so gedachten Differenzen kurz bezeichnen zu können, schreibt man sie* dx *und* dy *und nennt sie „Differentiale"; speciell heisst* dx *das Differential des Argumentes und* $dy = df(x)$ *das Differential der Function.*

An Stelle der umständlichen Ausdrucksweise *„Grenzwerth des Differentialquotienten“* (der natürlich nichts anderes als der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist), ist man übereingekommen, kurz die Benennung *„Differentialquotient“* selbst zu setzen und entsprechend an Stelle von $lim. \frac{dy}{dx}$ kurz $\frac{dy}{dx}$ zu schreiben.

Es entstammt dieser Brauch der zwar nicht correcten, aber in praxi brauchbaren Vorstellung, dass man sich das Differential dx als „constante“ und „im Vergleich zu den sonstigen Grössen der Untersuchung ausserordentlich kleine Zahl“ denkt.

Fig. 14.



Lehrsatz: *Der Differentialquotient einer Function $y = f(x)$ für den Werth x des Argumentes:*

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

ist seiner geometrischen Bedeutung und seinem Zahlwerthe nach gegeben durch $tg\,\alpha$, wo α der Winkel zwischen der nicht nach unten gerichteten Tangente der Curve in dem zum fraglichen Argumente x gehörenden Punkte P und der positiven Richtung der x-Axe ist.

3. Die derivirte oder abgeleitete Function $f'(x)$.

Gestattet man jetzt der eben gedachten Grösse x, irgend welche Veränderungen zu erfahren, so wird sich der Werth des Differentialquotienten $\frac{d\,f(x)}{dx}$ mit x ändern (vergl. Fig. 14) und also eine Function von x vorstellen.

Erklärung: *Der Differentialquotient der Function $y = f(x)$ wird in seiner Abhängigkeit von x durch $f'(x)$ bezeichnet:*

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x);$$

$f'(x)$ heisst die „derivirte“ oder „abgeleitete“ Function oder kurz die „Ableitung“ von $f(x)$.

Die Gleichung (1) setzt man auch in die Form:

(2) . . . . $dy = df(x) = f'(x)\,dx$

und beschreibt sie in dieser Gestalt durch den

Lehrsatz: *Das Differential $dy = df(x)$ der Function $f(x)$ ist gleich dem Product der abgeleiteten Function $f'(x)$ und des Differentials dx des Argumentes.*

Das Differential $df(x)$ erscheint hierbei *abhängig von den „beiden“ Grössen x und dx.*

Dem genauen Sinne nach stellt Formel (2) nichts anderes als (1) dar. Fasst man indessen dx als constanten und ausserordentlich kleinen Zuwachs von x, so gilt die Gleichung (2) für den entsprechenden Zuwachs dy von y nur angenähert.

Die Berechnung des Differentialquotienten und damit der abgeleiteten Function $f'(x)$ einer gegebenen Function $f(x)$ heisst *Differentiation der Function $f(x)$.*

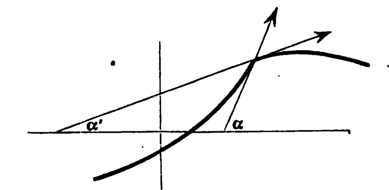
Es ist die *Grundaufgabe der Differentialrechnung, für vorgelegte Functionen die Differentiation zu leisten.*

4. Unstetigkeiten der abgeleiteten Function.

Aus der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten ergiebt sich folgender

Lehrsatz: *Die abgeleitete Function $f'(x)$ wird für $x = a$ unstetig durch Unendlichwerden, falls in dem Punkte $x = a$, $y = f(a)$ der zu $f(x)$ gehörenden Curve die Tangente parallel zur y-Axe läuft.*

Fig. 15.



Die Ableitung $f'(x)$ wird bei $x = a$ unstetig durch endlichen Sprung, falls die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ eine Einknickung erfährt.

Letzteres Vorkommniss ist durch Fig. 15 versinnlicht, kommt übrigens weiterhin kaum zur Geltung.

5. Differentiation einer Summe, sowie eines Productes aus einer Constanten und einer Function.

Ist $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, so folgt:

$$(1)\qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} + \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x}.$$

Für *lim.* $x_1 = x$ ergiebt sich:

$$(2)\qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx},\quad f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x).$$

Lehrsatz: *Eine Summe von zwei oder mehreren Functionen wird differentiirt, indem man jedes Glied differentiirt und die Summe der so entspringenden Ableitungen bildet.*

Ist $f(x) = a\,\varphi(x)$, so ist:

$$(3)\qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a\,\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \text{ und also } f'(x) = a\,\varphi'(x).$$

Lehrsatz: *Die Ableitung von $a\,\varphi(x)$, wo a einen constanten Factor bedeutet, ist $a\,\varphi'(x)$. Die Constante a tritt somit vor das Differentialzeichen:*

$$(4)\qquad \frac{d\,[a\,\varphi(x)]}{dx} = a\,\frac{d\,\varphi(x)}{dx} \text{ oder kurz } d\,[a\,\varphi(x)] = a\,d\,\varphi(x).$$

6. Differentiation der Potenz und der ganzen rationalen Function.

Ist $y = f(x) = x^n$ mit ganzem positiven n, so ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}\,x + x_1^{n-3}\,x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

und also folgt:

$$\lim_{x_1 = x}\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = n\,x^{n-1},$$

eine Formel, die auch für $n = 0$ gilt.

Lehrsatz: *Die Ableitung der Potenz $y = x^n$ mit ganzem, nichtnegativen Exponenten n ist $n\,x^{n-1}$:*

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1} \quad \textit{oder} \quad d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,dx.$$

Vermöge Nr. 5 folgt hieraus der

Lehrsatz: *Die Ableitung der ganzen rationalen Function n^{ten} Grades:*

$$(2)\quad .\ .\quad y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots + n\,a_n x^{n-1}.$$

Speciell für $n = 1$ und $n = 0$ gilt der

Lehrsatz: *Die Ableitung einer linearen ganzen Function ist constant, die Ableitung einer Constanten ist gleich Null.*

7. Differentiation des Logarithmus. Der natürliche Logarithmus.

Für die S. 5 eingeführte Function $y = {}^a\!\log x$ ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{}^a\!\log(x + \Delta x) - {}^a\!\log x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\,{}^a\!\log\cdot\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Setzt man hier abkürzend $\frac{x}{\Delta x} = v$, so wird sich, wenn man Δx

positiv wählt (vergl. S. 6), v der Grenze $+\infty$ annähern, sofern Δx unendlich klein wird. Es folgt [vergl. (8), S. 13]:

$$(1) \qquad \frac{d\,{}^a\!log\,x}{d\,x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{v=\infty} {}^a\!log\left[\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right] = \frac{1}{x} \cdot {}^a\!log\,e.$$

Man setze den rechts auftretenden Factor ${}^a\!log\,e = b$; dann ist:

$$(2) \quad \ldots \quad a^b = e \quad \text{und also} \quad b\,.\,{}^e\!log\,a = 1.$$

Erklärung: *Der Logarithmus der positiven Zahl a zur Basis e heisst der „natürliche" Logarithmus von a und wird kurz durch log a, d. h. ohne Angabe der Basis, bezeichnet.*

Aus (1) und (2) folgt der

Lehrsatz: *Die Differentiation des Logarithmus ist gegeben durch:*

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{d\,{}^a\!log\,x}{d\,x} = \frac{1}{x\,log\,a} \quad \text{oder} \quad d\,{}^a\!log\,x = \frac{d\,x}{x\,log\,a}.$$

Speciell folgt für den natürlichen Logarithmus:

$$(4) \quad \ldots \quad \frac{d\,log\,x}{d\,x} = \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad d\,log\,x = \frac{d\,x}{x}.$$

Die Einfachheit dieser Formel rechtfertigt die Benennung „natürlicher" Logarithmus.

Setzt man:

$$y = {}^a\!log\,x, \qquad z = log\,x,$$

so ist $x = a^y$ und also:

$$z = log\,(a^y) = y \cdot log\,a, \qquad {}^a\!log\,x = \left(\frac{1}{log\,a}\right) \cdot log\,x.$$

Erklärung: *Den reciproken Werth des natürlichen Logarithmus von a nennt man den „Modul des Logarithmensystems der Basis a" und bezeichnet ihn durch M_a:*

$$(5) \quad \ldots \quad M_a = \frac{1}{log\,a}.$$

Lehrsatz: *Der Logarithmus irgend einer positiven Zahl im Logarithmensystem der Basis a entsteht aus dem natürlichen Logarithmus derselben Zahl durch Multiplication mit dem Modul M_a:*

$$(6) \quad \ldots \quad {}^a\!log\,x = M_a\,.\,log\,x.$$

Für die Briggi'schen Logarithmen gilt:

$$(7) \quad \ldots \quad M_{10} = 0{,}434\,294\,48\ldots$$

8. Differentiation der Exponentialfunction. Die Exponentialgrösse.

Setzt man y statt x in (3), Nr. 7, so folgt:

$$y\,log\,a\,.\,d\,{}^a\!log\,y = d\,y.$$

Schreibt man hier ${}^a\!log\,y = x$ und also $y = a^x$, so ist:

$$d\,(a^x) = a^x\,log\,a\,.\,d\,x.$$

Lehrsatz: *Die Differentiation der Exponentialfunction* $y = a^x$ *ist geleistet durch:*

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a \quad oder \quad d(a^x) = a^x \log a \, . \, dx.$$

Speciell für die Function $y = e^x$ *folgt:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad oder \quad d(e^x) = e^x dx.$$

Erklärung und Lehrsatz: *Die dem natürlichen Logarithmus inverse Function* $y = e^x$ *nennt man kurz die „Exponentialgrösse". Sie hat die Eigenschaft, mit ihrer Ableitung identisch zu sein.*

9. Differentiation der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$.

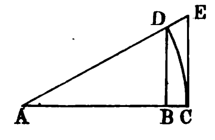
Vorbemerkung: In Fig. 16 sei $\widehat{CD} = s$ ein zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegener Kreisbogen vom Radius 1, so dass

$$\overline{AB} = \cos s, \quad \overline{BD} = \sin s, \quad \overline{CE} = tg\, s$$

zutrifft. Die Inhalte des Dreieckes ABD, des Kreisausschnittes ACD und des Dreieckes ACE liefern:

$$\sin s \, . \, \cos s < s < tg\, s$$

Fig. 16.



oder, da $\sin s > 0$ ist,

$$\cos s < \frac{s}{\sin s} < \frac{1}{\cos s}.$$

Wird s unendlich klein, so nähern sich die beiden äusseren Seiten dieser Ungleichung übereinstimmend der Grenze 1:

Lehrsatz: *Der Quotient* $\frac{\sin s}{s}$ *nähert sich für unendlich kleines* s *der Grenze 1:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{s=0} \left(\frac{\sin s}{s}\right) = 1.$$

Zur Differentiation von $y = \sin x$ knüpfe man an:

$$\sin x_1 - \sin x = 2 \cos \frac{x_1 + x}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x}{2},$$

woraus sich ergiebt:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.$$

Setzt man nun $\Delta x = 2s$, so ist für $\lim. \Delta x = 0$:

$$\lim_{s=0} (x + s) = x, \quad \lim_{s=0} \left(\frac{\sin s}{s}\right) = 1;$$

aus (2) folgt also für $\frac{dy}{dx}$ der Werth $\cos x$.

Für die Differentiation von $y = \cos x$ gründe man auf:

$$\cos x_1 - \cos x = -2 \sin \frac{x_1 + x}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x}{2}$$

eine analoge Rechnung.

Lehrsatz: *Die Ableitungen bezw. Differentiale der trigonometrischen Functionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind:*

$$(3) \quad \dots \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \qquad d \sin x = \cos x \, dx,$$

$$(4) \quad \dots \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \qquad d \cos x = -\sin x \, dx.$$

10. Differentiation der cyklometrischen Functionen $\operatorname{arc} \sin x$ und $\operatorname{arc} \cos x$.

Setzt man in die Formel (3) der vorigen Nummer y statt x und versteht unter y einen innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ gewählten Werth, so ist $\cos y > 0$ und

$$d \sin y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \, dy$$

mit *positiv* genommener Wurzel.

Setzt man nun $\sin y = x$ und also $y = \operatorname{arc} \sin x$, so ist y der *Hauptwerth* von $\operatorname{arc} \sin x$ (vergl. S. 9); man hat für denselben:

$$dx = \sqrt{1 - x^2} \, . \, d \operatorname{arc} \sin x.$$

Der Hauptwerth von $\operatorname{arc} \cos x$ sei durch (1), S. 9, gegeben, unter $\operatorname{arc} \sin x$ der Hauptwerth letzterer Function verstanden; dann berechnet sich die Ableitung von $\operatorname{arc} \cos x$ aus der von $\operatorname{arc} \sin x$ vermöge der Regeln in Nr. 5 und 6 S. 17 u. f.

Lehrsatz: *Die Ableitungen bezw. Differentiale der cyklometrischen Functionen* $\operatorname{arc} \sin x$ *und* $\operatorname{arc} \cos x$ *sind, wenn die Hauptwerthe dieser Functionen gemeint sind:*

$$(1) \quad \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(2) \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Gleichungen (2) kann man auch aus (4) Nr. 9 ableiten.

11. Differentiation des Productes und des Quotienten zweier Functionen.

I. Ist $y = f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, handelt es sich also um Differentiation des Productes zweier Functionen, so knüpfe man an:

$$f(x_1) - f(x) = \varphi(x_1)\psi(x_1) - \varphi(x_1)\psi(x) + \varphi(x_1)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x_1) \cdot \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x} + \psi(x) \cdot \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}.$$

Für *lim.* $x_1 = x$ ergiebt sich hieraus:

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{d[\varphi(x)\psi(x)]}{dx} = \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

wofür man auch abkürzend schreibt:

$$(2) \quad \frac{d[\varphi(x)\psi(x)]}{dx} = \varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x) \text{ oder } d(\varphi\psi) = \varphi.d\psi + \psi.d\varphi.$$

Lehrsatz: *Das Product zweier Functionen wird differentiirt, indem man jede Function mit der Ableitung der anderen multiplicirt und beide Producte addirt.*

II. Zur Differentiation von $y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ knüpfe man an:

$$\varphi(x) = \psi(x)f(x) \quad \text{und also} \quad \varphi'(x) = \psi(x)f'(x) + f(x)\psi'(x).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(3) \; f'(x) = \frac{d\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]}{dx} = \frac{\varphi'(x) - f(x)\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi \, . \, d\varphi - \varphi \, . \, d\psi}{\psi^2}.$$

Lehrsatz: *Der Quotient zweier Functionen wird differentiirt, indem man das Product des Nenners mit der Ableitung des Zählers um das Product des Zählers mit der Ableitung des Nenners vermindert und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt.*

12. Differentiation der rationalen Functionen, speciell der Function x^{-n}.

Der zuletzt angegebene Lehrsatz im Verein mit der Regel der Differentiation einer ganzen rationalen Function (S. 18) leistet die *Differentiation der rationalen Functionen.*

Hat man im Besonderen mit ganzer positiver Zahl n:

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

so ist $\varphi = 1$, $\varphi' = 0$, $\psi = x^n$, $\psi' = n x^{n-1}$, und also liefert (3) Nr. 11:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Lehrsatz: *Bedeutet m eine ganze positive oder negative Zahl oder Null, so gilt stets:*

(1) . . $$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1} \quad \text{oder} \quad d(x^m) = mx^{m-1}\,dx.$$

13. Differentiation der trigonometrischen Functionen $tg\,x$ und $ctg\,x$.

Da $tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$ und $ctg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$ ist, so leistet Formel (3), S. 22, im Verein mit (3) und (4), S. 21, die Differentiation von $tg\,x$ und $ctg\,x$.

Für $f(x) = tg\,x$ trage man in (3), S. 22, ein:

$$\varphi(x) = sin\,x, \quad \varphi'(x) = cos\,x, \quad \psi(x) = cos\,x, \quad \psi'(x) = -\,sin\,x.$$

Es ergiebt sich:

$$f'(x) = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$

Indem man analog für $ctg\,x$ verfährt, ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Ableitungen und Differentiale der trigonometrischen Functionen $tg\,x$ und $ctg\,x$ sind:*

(1) $$\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x, \qquad d\,tg\,x = \frac{dx}{cos^2 x},$$

(2) $$\frac{d\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{sin^2 x} = -(1 + ctg^2 x), \quad d\,ctg\,x = -\frac{dx}{sin^2 x}.$$

14. Differentiation der cyklometrischen Functionen $arc\,tg\,x$ und $arc\,ctg\,x$.

Da bei den Functionen $arc\,tg\,x$ und $arc\,ctg\,x$ beliebige Werthe von den entsprechenden Hauptwerthen nur um *additive Constante* $\nu\pi$ abweichen, so werden die Ableitungen nach Nr. 5 für die Hauptwerthe $arc\,tg\,x$ und $arc\,ctg\,x$ dieselben sein, wie für irgend welche Werthe dieser unendlich vieldeutigen Functionen.

Schreibt man in Formel (1) voriger Nummer y statt x, so ist

$$d\,tg\,y = (1 + tg^2 y)\,dy.$$

Setzt man nun $tg\,y = x$ und also $y = arc\,tg\,x$, so folgt

$$dx = (1 + x^2)\,.\,d\,arc\,tg\,x.$$

Zur Erledigung von $arc\,ctg\,x$ knüpfe man entsprechend an Formel (2), Nr. 13, oder an (1), S. 9.

Lehrsatz: *Die abgeleiteten Functionen und Differentiale der cyklometrischen Functionen $arc\,tg\,x$ und $arc\,ctg\,x$ sind:*

(1) $$\frac{d\,arc\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

(2) $$\frac{d\,arc\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad d\,arc\,ctg\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

15. Differentiation zusammengesetzter Functionen.

Ist $y = F(x) = f[\varphi(x)]$ eine zusammengesetzte Function (cf. S. 9) oder, wie man auch sagt, *die Function f einer Function* φ, so führe man zur Differentiation von $F(x)$ die *„Hülfsvariabele"* $z = \varphi(x)$ ein und setze also:

$$y = f(z), \qquad z = \varphi(x).$$

Vermöge (2), Nr. 3, S. 17, folgt hieraus:

$$dy = f'(z)\,dz, \qquad dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Hier ist dz das zu dx gehörende Differential, und dy gehört zu dz und dadurch mittelbar zu dx.

Durch Elimination von dz folgt:

(1) . . . . $$dy = f'(z)\,\varphi'(x)\,dx,$$

sowie hieraus weiter:

(2) . . . . $$\frac{dy}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

Lehrsatz: *Ist $y = f[\varphi(x)]$ eine zusammengesetzte Function, so führe man zur Differentiation derselben die Hülfsvariabele $z = \varphi(x)$ ein, differentiire $y = f(z)$ zunächst als Function von z oder, wie man kurz sagt, nach z und multiplicire das Ergebniss mit der Ableitung von $z = \varphi(x)$ nach x.*

Zusatz: *Ist $\varphi(x)$ selber eine zusammengesetzte Function, so hat man zur Berechnung des letzten Factors $\varphi'(x)$ in (2) die gleiche Regel ein zweites Mal, sowie eventuell noch öfter anzuwenden.*

Ist z. B. $y = \sin ax$, so setze man $ax = z$; nach (2) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \cdot \frac{d(ax)}{dx} = a \cos ax.$$

Für $y = \log \sin x$ setze man $z = \sin x$ und hat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\,x.$$

16. Differentiation der Function $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

In $y = \sqrt[q]{x^p}$ sei q eine positive ganze Zahl und p eine positive oder negative ganze Zahl oder 0.

Da y^q und x^p identisch sind, so gilt das Gleiche von den Ableitungen dieser beiden Functionen nach x:

$$q y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p x^{p-1}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Lehrsatz: *Ist m irgend ein positiver oder negativer rationaler Bruch, die sämmtlichen ganzen Zahlen eingeschlossen, so gilt:*

$$\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1} \quad oder \quad d(x^m) = m x^{m-1} dx.$$

Die Regeln in Nr. 15 und 16 leisten die *Differentiation der irrationalen Functionen.*

17. Die logarithmische Differentiation.

Erklärung: *Bei manchen Functionen $y = f(x)$ ist es zur Berechnung der Ableitung zweckmässig, zunächst von $f(x)$ den natürlichen Logarithmus $\log f(x)$ zu bilden und diesen nach x zu differentiiren. Man nennt diese Operation die „logarithmische Differentiation" von $f(x)$.*

Hierzu zwei Beispiele:

I. Man setze $y = f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ an [1]).

Zur Berechnung von $f'(x)$ differentiire man

$$\log y = \log f(x) = \psi(x) \, . \, \log \varphi(x)$$

auf Grund der S. 22 und S. 24 angegebenen Regeln. Es folgt:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \psi(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) \cdot \log \varphi(x),$$

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = y \, . \left[\psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) \log \varphi(x)\right].$$

II. Es sei $f(x)$ als Product von n Functionen gegeben:

$$f(x) = \varphi_1(x) \, . \, \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x).$$

Zur Berechnung von $f'(x)$ differentiire man:

$$\log f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \log \varphi_\nu(x).$$

Auf Grund von Nr. 15 folgt:

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi'_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}, \qquad f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x)}{\varphi_\nu(x)} \cdot \varphi'_\nu(x).$$

Lehrsatz: *Ein Product von n Functionen wird differentiirt, indem man die Ableitung jeder Function mit den übrigen $(n - 1)$ Functionen multiplicirt und die n Producte addirt.*

---

[1]) Um die Bildung dieser Function zu verstehen, schreibe man:

$$y = e^{\log y} = e^{\psi(x) \, . \, \log \varphi(x)}.$$

Bei der Herstellung von y als Function von x kommen also neben $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ noch der natürliche Logarithmus und die Exponentialgrösse zur Geltung.

18. Bemerkung über die Art der abgeleiteten Functionen.

Die Vergleichung der Art einer Function $f(x)$ mit der Art der zugehörigen Ableitung $f'(x)$ liefert folgenden

Lehrsatz: *Die Ableitung einer elementaren algebraischen Function ist stets wieder algebraisch und im Speciellen diejenige einer rationalen Function wieder rational. Der Logarithmus und die cyklometrischen Functionen haben algebraische Ableitungen. Dagegen haben die Exponentialfunctionen und die trigonometrischen Functionen wiederum Exponentialfunctionen bezw. trigonometrische Functionen zu Ableitungen.*

III. Capitel.

Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

---

1. Die Ableitungen höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

Da die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ wieder eine Function von x ist, so können wir auch $f'(x)$ differentiiren. Man schreibt:

$$(1)\quad \frac{d f'(x)}{d x} = f''(x),\ \frac{d f''(x)}{d x} = f'''(x)\ \ldots,\ \frac{d f^{(n-1)}(x)}{d x} = f^{(n)}(x), \ldots$$

Erklärung: *Die durch den in (1) angedeuteten successiven Differentiationsprocess zu gewinnende Function $f^{(n)}(x)$ heisst die derivirte (abgeleitete) Function oder Ableitung der n^{ten} Ordnung oder auch kurz „die n^{te} Ableitung" von $f(x)$.*

Ableitung schlechthin ist somit dasselbe wie erste Ableitung.

Beispiel I. Ist $f(x) = x^n$ mit positivem ganzen n, so ist:

$$(2)\quad \begin{cases} f'(x) = n x^{n-1},\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots, \\ f^{(n-1)}(x) = n(n-1)\ldots 2 . x,\ f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2 . 1, \\ f^{(n+1)}(x) = 0, \ldots \end{cases}$$

Durch Ausdehnung dieses Ansatzes auf die ganzen rationalen Functionen auf Grund der Regeln von S. 17 u. f. entspringt folgender

Lehrsatz: *Die n^{te} Ableitung einer ganzen rationalen Function n^{ten} Grades ist constant, alle höheren Ableitungen verschwinden.*

Beispiel II. Für $y = f(x) = \sin x$ folgt nach S. 21:

$$(3)\qquad f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ \ldots$$

Lehrsatz: *Bei der Function $f(x) = \sin x$ (und ebenso bei $\cos x$) ist für jedes n die $(n+4)^{te}$ Ableitung gleich der n^{ten} und die $(n+2)^{te}$ Ableitung unterscheidet sich von der n^{ten} nur durch das Vorzeichen.*

Beispiel III. Für $f(x) = e^{kx}$ hat man:

$$(4)\qquad f'(x) = k e^{kx},\ f''(x) = k^2 e^{kx},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = k^n e^{kx},\ \ldots$$

2. Die n^{te} Ableitung des Productes zweier Functionen.

Ist $f(x) = \varphi(x) \,.\, \psi(x)$, so findet man durch wiederholte Anwendung der Formel (2) S. 22, wenn der Kürze halber die Argumente x fortgelassen werden:

$$\begin{aligned} f' &= \varphi\psi' + \varphi'\psi,\\ f'' &= \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi''\psi,\\ f''' &= \varphi\psi''' + 3\varphi'\psi'' + 3\varphi''\psi' + \varphi'''\psi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hier ist die Summe der Ordnungen der Ableitungen in jedem rechts stehenden Gliede gleich der Ordnung der links stehenden Ableitung, und überdies haben das Anfangs- und Endglied rechter Hand jeweils den Factor 1.

Diese Angaben bleiben auch bei Fortsetzung des Differentiationsprocesses gültig, so dass man hat:

$$(1)\qquad f^{(n)} = \varphi\psi^{(n)} + \binom{n}{1}\varphi'\psi^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{k}\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)} + \cdots\\ + \varphi^{(n)}\psi.$$

Hierin ist $\binom{n}{k}$ eine symbolische Schreibweise für diejenige ganze Zahl, welche angiebt, wie oft das Glied $\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)}$ mit $1 < k < n$ im entwickelten Ausdrucke von $f^{(n)}$ auftritt.

Zur Bestimmung der Anzahl $\binom{n}{k}$ setze man im Speciellen:

$$\varphi(x) = x^k,\ \psi(x) = x^{n-k},\ f(x) = x^n.$$

Dann gilt zufolge (2) S. 26:

$$\psi^{(n)} = 0,\ \psi^{(n-1)} = 0,\ \ldots,\ \psi^{(n-k+1)} = 0,\\ \psi^{(n-k)} = (n-k)\,(n-k-1)\ldots 2.1,$$

$$\varphi^{(n)} = 0,\ \varphi^{(n-1)} = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(k+1)} = 0,\\ \varphi^{(k)} = k\,(k-1)\ldots 2.1$$

und $f^{(n)} = n\,(n-1)\ldots 2.1$. Aus (1) ergiebt sich somit:

$$1.2.3\ldots n = \binom{n}{k}.1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots(n-k).$$

Lehrsatz: *Die n^{te} Ableitung des Productes zweier Functionen $f(x) = \varphi(x).\psi(x)$ stellt sich in den Ableitungen der einzelnen Factoren durch die Formel (1) dar, wobei die Anzahl $\binom{n}{k}$ durch:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$$

gegeben ist. Der hiermit gewonnene Ansatz zur Berechnung von $f^{(n)}(x)$ heisst „die Leibniz'sche Regel“.

3. Beweis des binomischen Lehrsatzes.

Man setze in die Formel (1), Nr. 2 folgende Werthe ein:

$$\varphi(x) = e^{bx}, \quad \psi(x) = e^{ax}, \quad f(x) = e^{(a+b)x}.$$

Für diese Functionen folgt aus (4), S. 27:

$$\varphi^{(k)} = b^k . e^{bx}, \quad \psi^{(n-k)} = a^{n-k} . e^{ax}, \quad f^{(n)} = (a+b)^n . e^{(a+b)x}.$$

Nach Eintragung in (1), Nr. 2 und Forthebung von $f(x)$ folgt:

$$(1) \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n.$$

Erklärung: *Diese Formel bringt den „binomischen Lehrsatz“ zum Ausdruck. Die in (2), Nr. 2 dargestellte Zahl $\binom{n}{k}$ heisst dieserhalb „der k^{te} Binomialcoëfficient der n^{ten} Potenz“.*

Durch directe Rechnung zeigt man:

$$(2) \quad . \quad . \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

Formeln, die auch noch für $k = 0$ und $k = n$ gelten, wenn man, der Gleichung (1) entsprechend, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ setzt.

4. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung von $f(x)$.

Erklärung: *Sieht man den Differenzenquotienten von $y = f(x)$:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bei constantem Δx als Function von x an und bildet von dieser Function aufs Neue den Differenzenquotienten für die gleiche Aenderung Δx von x, so erhält man den Differenzenquotienten 2ter Ordnung oder kurz den 2ten Differenzenquotienten von $f(x)$. Entsprechend gelangt man zum 3ten, allgemein zum „n^{ten} Differenzenquotienten“ von $y = f(x)$.

Als zweiter Differenzenquotient berechnet sich:

$$(1)\quad \frac{1}{\varDelta x}\left[\frac{f(x+2\varDelta x)-f(x+\varDelta x)}{\varDelta x}-\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}\right] = \frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{\varDelta x^2},$$

wobei abkürzend $\varDelta x^2$ für $(\varDelta x)^2$ geschrieben ist.

Lehrsatz: *Der Ausdruck des n^{ten} Differenzenquotienten von $f(x)$ ist:*

$$(2)\quad \frac{1}{\varDelta x^n}\left\{f(x+n\varDelta x)-\binom{n}{1}f(x+[n-1]\varDelta x) + \binom{n}{2}f(x+[n-2]\varDelta x)-\cdots+(-1)^n f(x)\right\}.$$

Man zeigt diesen Satz durch den Schluss der „vollständigen Induction". Ist er für n richtig, so zeigt die directe Berechnung des $(n+1)^{ten}$ Differenzenquotienten aus dem n^{ten} vermöge (2), Nr. 3, dass der Satz auch noch für $(n+1)$ gilt. Da er nun für $n=2$ in (1) bewiesen ist, so gilt er allgemein.

Der Zähler des Ausdrucks (2) heisst *Differenz n^{ter} Ordnung* oder *n^{te} Differenz* von $y=f(x)$, und wird durch $\varDelta^n y$ oder $\varDelta^n f(x)$ bezeichnet.

Lehrsatz: *Der n^{te} Differenzenquotient einer Function $y=f(x)$ stellt sich als Quotient der n^{ten} Differenz der Function und der n^{ten} Potenz der Differenz $\varDelta x$ des Argumentes dar.*

5. Die Differentialquotienten und Differentiale höherer Ordnung von $y=f(x)$.

Erklärung: *Soll sich $\varDelta x$ als stetige Variabele der Grenze 0 nähern, ohne mit 0 identisch zu werden, so schreiben wir (wie S. 16) dx statt $\varDelta x$ und nennen dx das Differential von x. Entsprechend ersetzt man die Schreibweise $\varDelta^n y$ des zugehörigen Werthes der n^{ten} Differenz durch $d^n y = d^n f(x)$ und nennt dieselbe „das Differential n^{ter} Ordnung" oder „das n^{te} Differential" der Function.*

An Stelle der Benennung „Grenze des n^{ten} Differentialquotienten" $\lim.\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$ ist man übereingekommen, gerade wie bei $n=1$, kurz „n^{ter} Differentialquotient" zu sagen und zu schreiben.

Unter Gebrauch dieser Sprechweise gilt der

Lehrsatz: *Der n^{te} Differentialquotient von $y=f(x)$ liefert die n^{te} Ableitung von $f(x)$:*

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n}=f^{(n)}(x) \quad \text{oder ausführlich} \quad \lim_{\varDelta x=0}\left(\frac{\varDelta^n y}{\varDelta x^n}\right)=f^{(n)}(x).$$

Zum Beweise dieser Behauptung benutzt man folgenden aus der später abzuleitenden Taylor'schen Reihe entspringenden Satz:

Ist die Function $F(x)$ sammt ihrer Ableitung $F'(x)$ im Intervall von x bis $(x + \Delta x)$ eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x + \vartheta \cdot \Delta x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \tag{2}$$

wo ϑ eine von der Function F, dem Argument x und der Differenz Δx abhängende Zahl des Intervalles $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist.

Die Voraussetzungen über $F(x)$ sind bei den elementaren Functionen stets erfüllbar, falls man solche Werthe der Argumente meidet, bei denen Unstetigkeiten der Functionen eintreten.

Die verschiedenen Zahlen ϑ der folgenden Rechnung sollten stets dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehören.

Man trage nun in (2) ein:

$$F(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad F'(x) = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

und erhält dadurch:

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{f'(x + \vartheta \cdot \Delta x + \Delta x) - f'(x + \vartheta \cdot \Delta x)}{\Delta x}.$$

Die rechte Seite gestalte man vermöge (2) um, indem man unter $F(x)$ die Function $f'(x + \vartheta \cdot \Delta x)$ versteht:

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x + \vartheta \cdot \Delta x + \vartheta' \cdot \Delta x) = f''(x + 2\,\vartheta_1 \cdot \Delta x), \tag{4}$$

wobei $\vartheta + \vartheta' = 2\,\vartheta_1$ gesetzt ist.

Für $\lim. \Delta x = 0$ folgt aus (4) Formel (1) für $n = 2$.

Bildet man Formel (4) für $F(x)$ anstatt $f(x)$, und setzt demnächst für $F(x)$ den Ausdruck (3), so folgt entsprechend:

$$\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = f'''(x + 3\,\vartheta_2 \cdot \Delta x)$$

und damit der Beweis von (1) für $n = 3$ u. s. w.

6. Die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung.

Es sei ε eine „unendlich kleine Grösse", d. h. eine Grösse, welche sich als stetige Variabele der Null nähert, ohne mit Null identisch zu werden.

Erklärung: *Hängt die Grösse ζ derart von ε ab, dass $\frac{\zeta}{\varepsilon^n}$ für $\lim. \varepsilon = 0$ endlich und von 0 verschieden ist, so sagt man, ζ werde im Vergleich zu ε unendlich klein von der n^{ten} Ordnung, oder man spricht auch, so oft es keine Zweideutigkeit hervorruft, schlechthin von einer „unendlich kleinen Grösse der n^{ten} Ordnung".*

Da $f^{(n)}(x)$ für gewöhnlich nur für vereinzelte Werthe von x gleich 0 oder ∞ wird, so folgt aus (1), S. 29, der

Lehrsatz: *Das n^{te} Differential $d^n y = d^n f(x)$ einer Function $y = f(x)$ ist im Allgemeinen unendlich klein von der n^{ten} Ordnung, sofern dx unendlich klein von der ersten Ordnung wird.*

Ist ζ unendlich klein von der n^{ten} und η unendlich klein von der m^{ten} Ordnung, und ist $m > n$ und also $l = m - n > 0$, so ist:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\eta}{\zeta}\right) = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\eta}{\varepsilon^m}\cdot\frac{\varepsilon^n}{\zeta}\cdot\varepsilon^l\right) = 0.$$

Lässt man, gerade wie bei Differentialen, das Zeichen *lim.* in den Formeln fort, so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{\zeta+\eta}{\zeta} = 1 \text{ oder, was dasselbe besagen soll, } \zeta + \eta = \zeta.$$

Dies Ergebniss drückt man aus durch den

Lehrsatz: *Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ist im Vergleich zu einer solchen niederer Ordnung selber unendlich klein und kann neben jener vernachlässigt werden.*

Eine zwar ungenaue, aber nützliche Veranschaulichung dieser Verhältnisse gewinnt man dadurch, dass man die unendlich kleine Grösse ε durch eine constante und sehr kleine Zahl ersetzt:

I. Ist $\varepsilon = \left(\frac{1}{10}\right)^3$, so ist ε^2 als tausendster Theil von ε im Vergleich zu ε sehr klein.

II. Theilt man den Würfel von der Cubikeinheit, wie Fig. 17 andeutet, durch äquidistante Horizontalebenen in n Scheiben der Höhen

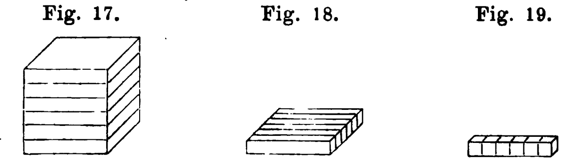


Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

$\varepsilon = \frac{1}{n}$, so wird der Cubikinhalt der einzelnen Scheibe ε und ist somit bei grossem n sehr klein.

Theilt man die einzelne Scheibe, wie Fig. 18 zeigt, durch n äquidistante Verticalebenen in n Prismen, so ist der Cubikinhalt des einzelnen Prismas ε^2 und offenbar im Vergleich zum Volumen der Scheibe selber sehr klein.

Theilt man endlich das Prisma in n congruente Würfel (vergl. Fig. 19), so wird der Cubikinhalt eines einzelnen Würfels ε^3 wiederum gegenüber dem des Prismas sehr kein.

IV. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$.

1. Satz über das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$.

Unter $y = f(x)$ ist auch im Laufe der nächsten zwei Capitel irgend eine „elementare" Function verstanden.

Erklärung: *Eine Function $y = f(x)$ heisst mit x „gleichändrig" oder „ungleichändrig", je nachdem sie mit stetig wachsendem x gleichfalls wächst oder abnimmt.*

Es ist z. B. die Function $y = x^2 - 2$ für alle positiven Werthe des Argumentes mit x gleichändrig, für alle negativen Werthe mit x ungleichändrig. Die Function $\sin x$ ist zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ mit x gleichändrig, im Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ ungleichändrig u. s. w.

Lehrsatz: *Eine Function $f(x)$ ist für alle diejenigen Werthe von x mit x gleichändrig (ungleichändrig), für welche die Ableitung positiven (negativen) Zahlwerth hat.*

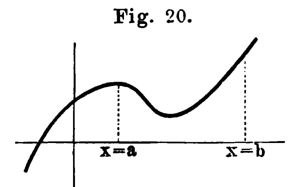
Der Beweis entspringt aus der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten (vergl. Fig. 14, S. 16); daselbst ist α spitz oder stumpf, je nachdem für den Punkt P die Function $f(x)$ mit x gleichändrig ist oder nicht.

2. Die Maxima oder Minima einer Function $f(x)$.

Erklärung: *Hört $f(x)$, während x als stetig wachsende Grösse den Werth $x = a$ passirt, auf, mit x gleichändrig zu sein, um demnächst mit x ungleichändrig zu werden, so wird $f(x)$ für $x = a$ zu einem „Maximum". Hört $f(x)$, während x als stetig wachsende Grösse den Werth $x = a$ passirt, auf, mit x ungleichändrig zu sein, um demnächst mit x gleichändrig zu werden, so wird $f(x)$ für $x = a$ zu einem „Minimum".*

Fig. 20 erläutert den Fall des Maximums bei $x = a$.

Fig. 20.



Zufolge der Erklärung werden hier die Werthe der Function nur für solche Argumente x mit einander verglichen, welche in der nächsten Nachbarschaft oder, wie man sagt, in der „*Umgebung*" von $x = a$ liegen. Es darf somit in Fig. 20 sehr wohl $f(b)$ grösser als der Maximalwerth $f(a)$ sein.

Lehrsatz: *Eine Function $f(x)$ wird stets und nur dann für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum), falls ihre Ableitung $f'(x)$, während x als stetig wachsende Grösse den Werth $x = a$ passirt, von positiven zu negativen (negativen zu positiven) Zahlwerthen übergeht.*

Der Beweis ergiebt sich sofort aus Nr. 1.

Der Vorzeichenwechsel der Zahlwerthe von $f'(x)$ kann auf drei Arten vor sich gehen:

I. *Ist $f'(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig, so kann $f'(x)$ nur vermöge des „stetigen Durchganges durch den Werth 0" bei $x = a$ von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Fig. 21.

(−1, 4/3)

(2, −19/6)

In diesem Falle gewinnt die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ eine parallel zur x-Axe verlaufende Tangente. Als Beispiel gelte die implicite durch:

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 6y + 1 = 0$$

definirte Function $y = f(x)$. Die Ableitung:

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

geht stetig von positiven zu negativen Werthen, wenn x als wachsende Grösse den Werth $x = -1$ passirt; $f'(x)$ geht von negativen zu positiven Werthen, wenn x ebenso den Werth $x = 2$ durchläuft. Somit ist $f(-1) = {}^4/_3$ ein Maximum und $f(2) = -{}^{19}/_6$ ein Minimum; der in Fig. 21 gezeichnete Verlauf der Curve der vorliegenden Function bringt dies zur Anschauung.

II. *Zweitens kann $f'(x)$ vermöge des „Durchganges durch ∞" von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Diesen Fall versinnliche das Beispiel:

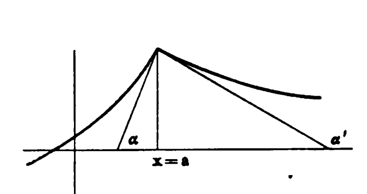
$$f(x) = 5 - 3\sqrt[5]{(x-2)^2}, \quad f'(x) = -\frac{6}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}},$$

wo $f'(x)$ bei $x = 2$ durch ∞ von positiven zu negativen Werthen übergeht. Es ist somit $f(2) = 5$ ein Maximum der Function (vergl. Fig. 22).

Fig. 22.

(2,5)

Fig. 23.



Bei Annäherung an den Werth $x = a$ von der einen oder anderen Seite wird der S. 16 mit α bezeichnete Winkel sich der Grenze $\frac{\pi}{2}$ annähern.

Hieraus ergiebt sich, dass die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ einen sogen. *Rückkehrpunkt* (eine *Spitze*) mit einer *zur y-Axe parallelen* Tangente besitzt.

III. *Endlich kann $f'(x)$ unstetig „durch endlichen Sprung" von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Dieser Fall, den Fig. 23 (a. v. S.) erläutert, gewinnt bei den elementaren Functionen keine Geltung.

3. Gebrauch der höheren Ableitungen zur Bestimmung der Maxima und Minima von $f(x)$.

Es gelte jetzt die specielle Annahme, dass $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ *stetig* und (was nicht immer besonders genannt wird) eindeutig seien.

Soll $f(x)$ für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum) werden, so muss zufolge I., Nr. 2 die Gleichung $f'(a) = 0$ gelten und $f'(x)$ muss in der ganzen Umgebung von $x = a$ ungleichändrig (gleichändrig) mit x sein.

Die letztere Forderung wird nach Nr. 1 jedenfalls dann befriedigt sein, wenn $f''(x)$ in der ganzen Umgebung von $x = a$ negativ (positiv) ist.

Ist aber $f''(a) < 0$ (bezw. > 0), so wird wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ die Ungleichung $f''(x) < 0$ (bezw. > 0) in der nächsten Umgebung von $x = a$ überall gelten.

Lehrsatz: *Sind $f(x), f'(x), f''(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwindet $f'(x)$ für $x = a$, während $f''(a) < 0$ (bezw. > 0) ist, so wird $f(x)$ für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum).*

Weitere Untersuchung erfordert der Fall, dass auch $f''(a) = 0$ ist. Es sei sogleich:

$$(1) \qquad f'(a) = 0,\; f''(a) = 0, \ldots,\; f^{(n-1)}(a) = 0,\; f^{(n)}(a) \gtrless 0,$$

d. h. alle Ableitungen bis zur n^{ten} exclusive sollen für $x = a$ verschwinden.

Ist z. B. $f^{(n)}(a) < 0$, so zeigt der letzte Lehrsatz, dass $f^{(n-2)}(a) = 0$ ein Maximum von $f^{(n-2)}(x)$ ist, und dass somit $f^{(n-2)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ nicht positiv ist.

Dies zeigt, dass $f^{(n-3)}(x)$ in der ganzen Umgebung von $x = a$ mit x ungleichändrig ist, und dass somit $f^{(n-4)}(a) = 0$ ein Maximum von $f^{(n-4)}(x)$ ist.

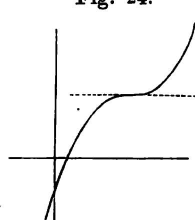
Durch Fortsetzung des Schlussverfahrens und Ausdehnung auf den Fall $f^{(n)}(a) > 0$ ergiebt sich der

Lehrsatz: *Sind $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwinden die $(n - 1)$ ersten Ableitungen für $x = a$, während $f^{(n)}(a) \gtrless 0$ ist, so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch Minimum, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ist hingegen n*

gerade, so wird $f(a)$ zu einem Maximum (Minimum) von $f(x)$, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ (> 0) ist.

Die Tangente der Curve $y = f(x)$ im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ ist wegen $f'(a) = 0$ parallel zur x-Axe. Ist aber n ungerade, so bleibt die Function $f(x)$, nachdem x den Werth a durchlaufen hat, mit x gleichändrig (ungleichändrig), wie sie es vorher war. Die Curve $y = f(x)$ hat bei $x = a$, $y = f(a)$ einen sogen. „Wendepunkt" mit einer zur x-Axe parallelen „Wendetangente" (vergl. Fig. 24).

Fig. 24.



V. Capitel.

Betrachtung des Verlaufes ebener Curven.

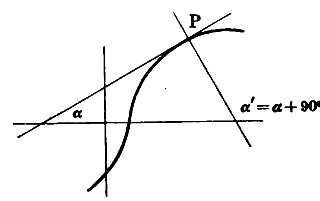
---

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Curve.

In der Ebene seien rechtwinklige Coordinaten x, y zu Grunde gelegt, und es sei eine Curve gegeben, deren Gleichung in die Gestalt $y = f(x)$ gesetzt sei.

Die Curve werde kurz C genannt; und $f(x)$ sei eine elementare eindeutige oder mehrdeutige Function.

Fig. 25.



Erklärung: *Sind P und P_1 zwei Punkte der Curve C, so bezeichnet man die Grenzlage, welcher die durch P und P_1 hindurchlaufende Gerade zustrebt, wenn P_1 dem Punkte P auf C ohne Ende oder unendlich nahe kommt, als „Tangente" der Curve C im Punkte P.*

Die Tangente giebt in der Umgebung von P den Verlauf der Curve C „in erster Annäherung" an.

Erklärung: *Eine im Punkte P die Tangente und also die Curve senkrecht schneidende Gerade heisst „Normale" von C im Punkte P.*

Um die Gleichungen für Tangente und Normale aufzustellen, seien ξ, η die Coordinaten der Punkte auf einer dieser Geraden, während x und $y = f(x)$ die Coordinaten von P sind.

Als „Richtungscoëfficienten“ für Tangente und Normale folgen aus S. 16, sowie aus Fig. 25 (a. v. S.) die Werthe:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad tg\,\alpha' = -\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{f'(x)}.$$

Lehrsatz: *Die Gleichung der Tangente von C im Punkte P der Coordinaten x, $y = f(x)$ ist:*

$$(1) \quad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \quad oder \quad \eta - y = f'(x)(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalen von C im Punkte P ist:

$$(2) \quad (\xi - x) + \frac{dy}{dx}(\eta - y) = 0 \quad oder \quad (\xi - x) + f'(x)(\eta - y) = 0.$$

2. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Curve C für einen Punkt P.

Erklärung: *Die auf der Tangente und Normale durch den Berührungspunkt und die x-Axe eingegrenzten Strecken heissen „Tangente und Normale im engeren Sinne“ und werden durch T und N bezeichnet. Hat es keine Zweideutigkeit zur Folge, so nennt man T und N auch wohl schlechthin „Tangente“ und „Normale“.*

Fig. 26.

Die Projectionen der Strecken T und N auf die x-Axe heissen „Subtangente“ und „Subnormale“ und werden durch St und Sn bezeichnet.

Fig. 26 bringt diese Verhältnisse für den Fall zur Darstellung, dass bei P die Ordinate y positiv und $f(x)$ mit x gleichändrig ist.

Durch Discussion der in Fig. 26 auftretenden Dreiecke folgt der

Lehrsatz: *Für die zum Punkte P von C gehörenden Strecken St, Sn, T und N gelten die Gleichungen:*

$$(1) \qquad St = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f'(x)}, \qquad Sn = y\frac{dy}{dx} = yf'(x),$$

$$(2) \quad \cdot \; \cdot \begin{cases} T = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{f'(x)}\right)^2}, \\ N = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bleiben auch in den übrigen, durch Fig. 26 nicht einbegriffenen Fällen bestehen; nur muss man vorkommenden Falles die rechten Seiten im Zeichen wechseln, damit für T, N, St, Sn *positive* Zahlwerthe entspringen.

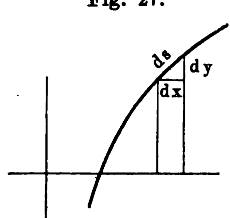
3. Bogendifferential der Curve C.

Sind P und P_1 zwei einander nahe gelegene Punkte der Abscissen x und x_1 auf C, so bezeichnen wir die von irgend einem Ausgangs-

punkte auf C bis P und P_1 gemessene Bogenlänge von C durch s bezw. s_1.

Setzt man $x_1 - x = \Delta x$, $s_1 - s = \Delta s$, so ist Δs der dem Zuwachs Δx entsprechende Zuwachs des Bogens s.

Fig. 27.



Erklärung: *Kommt P_1 dem Punkte P ohne Ende nahe, so setzt man dx und ds für Δx und Δs und nennt ds das dem Differential dx entsprechende „Bogendifferential" oder „Bogenelement" der Curve C.*

Da C in der Umgebung von P keine Einknickung erfährt, so kann man, falls P_1 dem Punkte P sehr nahe liegt, das zwischen P und P_1 verlaufende Stück von C ohne merklichen Fehler als gerade ansehen [1]).

Dann zeigt Fig. 27 folgenden

Lehrsatz: *Das Bogendifferential ds von C ist gegeben durch:*

(1) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad oder \quad ds = \pm\, dx\sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem s mit x gleichändrig ist oder nicht.

Mit Hülfe des Bogendifferentials schreiben sich die Gleichungen (2) Nr. 2:

(2) $$\ldots \quad T = \pm\, y\,\frac{ds}{dy}, \qquad N = \pm\, y\,\frac{ds}{dx}.$$

4. Beispiele zur Berechnung der Tangenten, Normalen u. s. w.

I. Die in Fig. 28 (a. f. S.) dargestellte *Parabel* hat die Gleichung:

(1) $$\ldots \quad y^2 = 2px \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2px}.$$

Der in Fig. 28 gewählte Punkt P hat positives y, so dass gilt:

(2) $$\ldots \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

Die Formeln der vorletzten Nummer geben somit für St und Sn:

(3) $$\ldots \quad St = \frac{y^2}{p} = 2x, \qquad Sn = y \cdot \frac{p}{y} = p.$$

Lehrsatz: *Bei der Parabel ist die Subtangente des einzelnen Punktes P gleich der doppelten Abscisse von P, die Subnormale aber ist constant gleich p.*

II. Erklärung: *Lässt man einen Kreis auf einer Geraden rollen, so beschreibt ein einzelner Punkt des Kreises eine sogen. „Cykloide".*

Der Kreis habe den Radius a; die Gerade, auf welcher der Kreis rollt, werde die x-Axe; der Berührungspunkt der x-Axe und des Kreises

---

[1]) Genauer spricht man die Sachlage dahin aus, dass der Quotient des Bogens ds und der zugehörigen Sehne für $lim.\, ds = 0$ die Grenze 1 hat.

in der Anfangslage sei der Nullpunkt O. Indem der Kreis etwa nach rechts rollt, beschreibt der anfängliche Berührungspunkt die in Fig. 29 angedeutete Cykloide.

Bei der in Fig. 29 festgehaltenen Lage des Kreises hat der die Cykloide beschreibende Punkt die Stelle A erreicht. Um das Centrum C

Fig. 28.

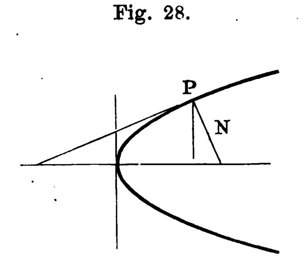
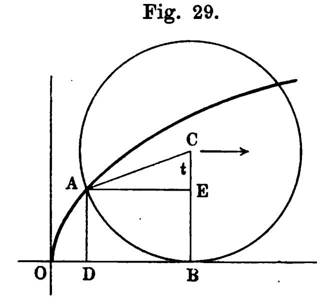


Fig. 29.



hat sich der Kreis bis dahin um den Winkel $\measuredangle\, ACB = t$, den sogen. „*Wälzungswinkel*", gedreht.

Für die Coordinaten $\overline{OD} = x$, $\overline{AD} = y$ des Punktes A der Cykloide liefert die Discussion der Fig. 29:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t).$$

Durch Elimination von t findet man als Gleichung zwischen x und y:

$$(5) \quad . \quad . \quad x = -\sqrt{2\,ay - y^2} + a \,.\, \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a - y}{a}\right).$$

L e h r s a t z: *In (5) ist die Gleichung der Cykloide gegeben. Insofern hier die transcendente Function arc cos vorkommt, heisst die Cykloide eine transcendente Curve.*

Für manche Zwecke ist es einfacher, die Cykloide durch das Gleichungspaar (4) darzustellen, wobei die Coordinaten x, y des einzelnen Cykloidenpunktes als Functionen der unabhängigen Variabelen t erscheinen.

Aus (4) ergiebt sich leicht:

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dx} = ctg\left(\frac{t}{2}\right), \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Die Formeln in Nr. 2 ergeben sonach:

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} T = 2\,a\,\dfrac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, & N = 2\,a \sin\left(\frac{t}{2}\right), \\[2ex] St = 2\,a\,\dfrac{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, & Sn = a \sin t. \end{cases}$$

Zufolge der letzten Formel ist die Subnormale in Fig. 29 durch die Strecke $\overline{DB}$ gegeben.

Lehrsatz: *Bei der Cykloide läuft die Normale des einzelnen Punktes A durch den Berührungspunkt B des zugehörigen Kreises mit der x-Axe hindurch.*

5. Concavität und Convexität der Curven.

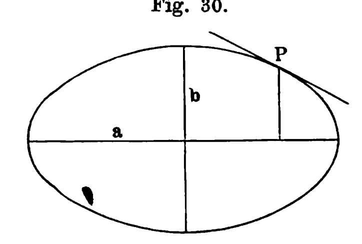
Man ziehe im Punkte P der Curve C die Tangente und nehme an, dass dieselbe nicht parallel zur y-Axe ist.

Erklärung: *Liegt die Curve C in der nächsten Umgebung von P unterhalb* [1] *der Tangente, so heisst die Curve bei P „nach unten concav" (nach oben convex); liegt indess C in der nächsten Umgebung von P oberhalb der Tangente, so heisst die Curve bei P „nach unten convex" (nach oben concav).*

Der Fall der Concavität nach unten liegt in Fig. 14 (S. 16) sowohl rechts wie links vor.

Aus der im Anschluss an jene Figur dargelegten geometrischen Bedeutung von $f'(x)$ ergiebt sich, dass für diesen Fall bei P die Function $f'(x)$ mit x ungleichändrig und also $f''(x)$ *negativ* ist.

Fig. 30.



Entsprechend findet man, dass im Falle der Convexität nach unten $f''(x)$ in der Umgebung von P *positiv* ist.

Lehrsatz: *Ist die Curve C bei P nach unten concav (convex), so hat die zweite Ableitung $f''(x)$ in der Umgebung von P negative (positive) Zahlwerthe und umgekehrt.*

Für die in Fig. 30 dargestellte Ellipse ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn der Punkt P oberhalb der x-Axe liegt. Für diesen Fall ist:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3}.$$

Die Ellipse ist in der Umgebung von P nach unten concav, was in Uebereinstimmung mit dem negativen Zeichen des Zahlwerthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei P ist.

In die vorstehende Betrachtung ist der Fall, dass die Tangente in P mit der y-Axe parallel ist, nicht einbegriffen. Für diesen Fall

[1]) Die Richtung „nach unten" soll in der xy-Ebene diejenige der negativen y-Axe sein.

gehe man nach S. 3 zur Betrachtung der zu $f(x)$ inversen Function über, um die concave Seite der Curve zu bestimmen.

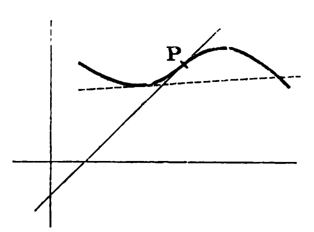
6. Wende- oder Inflexionspunkte einer Curve.

Auch weiterhin sei die Tangente in P nicht parallel zur y-Axe.

Erklärung: *Ist die Curve C auf der einen Seite des Punktes P nach unten concav und auf der anderen Seite nach unten convex, so heisst der Punkt P ein Wende- oder Inflexionspunkt der Curve und die Tangente in P heisst Wende- oder Inflexionstangente.*

Dieses Vorkommniss ist in Fig. 31 erläutert.

Fig. 31.



Von einer gewöhnlichen Tangente, als der Verbindungsgeraden zweier einander unendlich nahe rückenden Punkte von C, sagt man, sie habe mit C *zwei „consecutive" Punkte* gemein.

Die stetige Ueberführung einer gewöhnlichen Tangente in eine Wendetangente (vergl. Fig. 31) zeigt den

Lehrsatz: *Eine Wendetangente hat mit der Curve drei consecutive Punkte gemein.*

Die Ergebnisse von Nr. 5 liefern weiter den

Lehrsatz: *Passirt x als stetige Variabele den Werth der Abscisse des Wendepunktes P, so geht $f''(x)$ von negativen zu positiven Zahlwerthen oder umgekehrt über.*

Die Rechnungen in Nr. 7 zeigen, dass $f''(x)$ bei diesem Uebergange *den Werth Null* passirt.

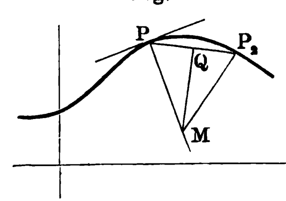
Für $y = \sin x$ ist $f''(x) = - \sin x$; sämmtliche Schnittpunkte der x-Axe und der Sinuslinie sind Wendepunkte (vergl. Fig. 9, S. 7).

Einen etwaigen Wendepunkt mit einer zur y-Axe parallelen Tangente mache man wieder durch Uebergang zu der mit $f(x)$ inversen Function der Rechnung zugänglich.

7. Die Krümmungskreise einer Curve.

Der Kreis durch die drei Punkte P, P_1, P_2 der Curve C heisse K. Rückt P_1 dem Punkte P unendlich nahe, so werden K und C im Punkte P gemeinsame Tangente gewinnen und also *einander berühren.*

Fig. 32.



Rückt überdies auch noch P_2 dem Punkte P unendlich nahe, so geht hierbei K in eine Grenzlage über, welche man als *den „Krümmungskreis" der Curve C im Punkte P* bezeichnet.

Lehrsatz: *Der Krümmungskreis von C im Punkte P hat mit der Curve C bei P drei consecutive Punkte gemein.*

Unter allen die Curve C im Punkte P berührenden Kreisen schmiegt sich der Krümmungskreis der Curve am engsten an; er ist dieserhalb geeignet, ein „Maass für die Krümmung" der Curve C bei P abzugeben.

Erklärung: *Der Mittelpunkt des Krümmungskreises heisst Krümmungscentrum, der Radius desselben Krümmungsradius der Curve C an der Stelle P.*

Das Krümmungscentrum liegt auf der zu P gehörenden Normale von C.

Sind P_1 und P einander bereits unendlich nahe, während P_2 noch endlich entfernt ist, so findet man den Mittelpunkt M von K durch die in Fig. 32 angedeutete Construction, wobei $\overline{MQ}$ das Loth auf der Mitte von $\overline{PP_2}$ ist.

Rückt jetzt auch P_2 dem Punkte P ohne Ende nahe, so wird $\overline{QM}$ zu einer mit $\overline{PM}$ „consecutiven" Normale.

Lehrsatz: *Das Krümmungscentrum ist die Grenzlage des Schnittpunktes der zu P gehörenden Normale mit einer zweiten Normale, deren Fusspunkt dem Punkte P ohne Ende nahe kommt:*

Sind x, y die Coordinaten von P, ferner $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ diejenigen eines P nahe gelegenen Punktes P' und endlich ξ, η diejenigen des Schnittpunktes der zu P und P' gehörenden Normalen, so gilt nach (2), S. 36 (oben):

$$(\xi - x) + f'(x)(\eta - y) = 0,$$
$$(\xi - x - \Delta x) + f'(x + \Delta x)(\eta - y - \Delta y) = 0.$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten folgt:

$$1 - (\eta - y) \cdot \frac{f'(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f'(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Für $lim. \Delta x = 0$ ergiebt die Fortsetzung der Rechnung den

Lehrsatz: *Die Coordinaten ξ, η des zum Punkte P gehörenden Krümmungscentrums, sowie der Krümmungsradius ϱ stellen sich vermöge der Coordinaten x, y von P und der Curvengleichung $y = f(x)$, wie folgt, dar:*

$$(1) \quad \xi = x - \frac{f'(x) + [f'(x)]^3}{f''(x)}, \quad \eta = y + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)},$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \pm \frac{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Die letzte Formel berechnet sich auf Grund des Umstandes, dass ϱ gleich der Entfernung des Krümmungscentrums vom Punkte P ist. Das Vorzeichen ist rechts so zu wählen, dass ϱ positiven Werth bekommt.

Ist P Wendepunkt, so stellt die Wendetangente den Krümmungskreis dar. Dies erfordert, falls $f'(x)$ für P endlich ist, $f''(x) = 0$ in Uebereinstimmung mit den Angaben von Nr. 6.

Setzt man im Falle der *Ellipse* in (1) und (2) die in (1), S. 39 gegebenen Werthe von $f'(x)$, $f''(x)$ ein, so ergiebt die Entwickelung:

$$(3) \quad . \quad . \quad \xi = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}, \quad \varrho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

unter $e^2 = a^2 - b^2$ das Quadrat der Excentricität verstanden.

Für die *Cykloide* liefern die dritte und erste Formel (6), S. 38:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\,ctg\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4a\,sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Die Entwickelung der Formeln (1) und (2) ergiebt damit:

$$(5) \quad \xi = a\,(t + sin\,t), \quad \eta = -a\,(1 - cos\,t), \quad \varrho = 4a\,sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

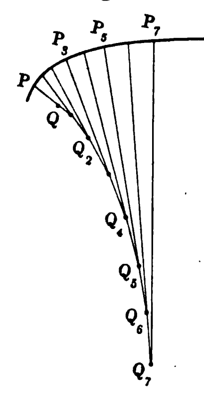
Durch Vergleich mit der zweiten Formel (7), S. 38, entspringt der Lehrsatz: *Für den einzelnen Punkt der Cykloide ist der Krümmungsradius ϱ doppelt so gross, als die Normale N.*

In Fig. 28, S. 38, ist somit der zum Punkte A gehörende Krümmungshalbmesser die über B um sich selbst verlängerte Strecke $\overline{AB}$.

8. Die Evoluten und Evolventen.

Erklärung: *Der geometrische Ort aller zu einer Curve C gehörenden Krümmungscentra stellt eine neue Curve dar, welche man als Krümmungsmittelpunktscurve oder Evolute von C bezeichnet.*

Fig. 33.



In Fig. 33 sind für einige, einander nahe gelegene Punkte P, P_1, P_2, ... von C die Normalen errichtet und je zwei auf einander folgende unter ihnen in Q, Q_1, ... zum Durchschnitt gebracht. Diese Punktreihe giebt ein ungefähres Bild vom Verlauf der Evolute.

Speciell veranschaulicht Fig. 33 folgenden Lehrsatz: *Die Normale von C im Punkte P ist Tangente der Evolute in dem P entsprechenden Punkte Q.*

Es sind nämlich in (1), Nr. 7 die Coordinaten ξ, η von Q als Function von x gegeben. Hieraus folgt:

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dx} = -f' \cdot \frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2},$$

wo der Kürze halber die Argumente x bei f', f'', f''' fortgelassen sind. Aus (1) folgt weiter:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\xi}{dx} = -f'(x) \cdot \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Braucht man nun den Winkel α im Sinne von Fig. 14, S. 16, und nennt den entsprechenden Winkel bei der Evolute α', so folgt aus (2):

$$(3) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\alpha' = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{tg\,\alpha} \quad \text{und also} \quad \alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Des weiteren veranschauliche man sich an Fig. 33 den

Lehrsatz: *Das Bogendifferential $d\sigma$ der Evolute ist absolut genommen gleich dem entsprechenden (d. i. zu demselben dx gehörenden) Differential $d\varrho$ des Krümmungsradius.*

Aus (1) ergiebt sich nämlich:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = (1 + f'^2)\left(\frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2}\right)^2,$$

und zu dem gleichen Ausdruck gelangt man von (2), Nr. 7, aus für $\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2$, so dass in der That $d\sigma = \pm\, d\varrho$ gilt.

Denkt man die Tangente $\overline{QP}$ der Evolute als gespannten Faden, so zeigt der letzte Lehrsatz, dass bei Auf- oder Abwickelung des Fadens auf der Evolute der Endpunkt P des Fadens die ursprüngliche Curve C beschreibt.

Erklärung: *Die Curve, welche durch irgend einen Punkt eines längs einer gegebenen Curve aufgewickelten und gespannten Fadens bei weiterer Auf- oder Abwickelung beschrieben wird, heisst eine Evolvente der gegebenen Curve.*

Da hierbei die Auswahl des beschreibenden Punktes auf dem Faden willkürlich ist, so hat *jede Curve unendlich viele Evolventen.*

Lehrsatz: *Das Verhältniss zwischen der ursprünglichen Curve C und ihrer Evolute kann man auch so aussprechen, dass C eine unter den Evolventen jener Evolute ist.*

9. Gleichung der Evolute und Beispiele.

Durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \xi = x - \frac{f' + f'^3}{f''} \qquad \text{und} \qquad \eta = f + \frac{1 + f'^2}{f''}$$

sind die Coordinaten ξ, η des einzelnen Punktes der Evolute in x dargestellt. Die Elimination von x liefert eine Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ für ξ und η, welche somit *die Gleichung der Evolute von C* ist.

Für die *Ellipse* galten die Formeln (3), S. 42. Unter Heranziehung der Ellipsengleichung liefert die Elimination von x und y:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$$

als Gleichung der Evolute.

Die Gestalt dieser Evolute ist in Fig. 34 angegeben, wobei man sich die Zuordnung der Punkte P und Q deutlich machen wolle.

Fig. 34.

Die Scheitelpunkte der Ellipse sind Punkte grösster bezw. kleinster Krümmung; dem entspricht es, dass die ihnen zugehörigen Punkte der Evolute Rückkehrpunkte (Spitzen) sind. —

Die Evolute der *Cykloide* ist in Fig. 35 dargestellt; es gilt der Lehrsatz, *dass die Evolute der Cykloide selbst wieder eine Cykloide ist.*

Führt man nämlich das in Fig. 35 angedeutete Coordinatensystem X, Y vermöge:

$$X = \xi + a\pi, \quad Y = \eta + 2a$$

ein und setzt $T = t + \pi$, so nehmen die Gleichungen (5), S. 42, der Evolute der Cykloide die Gestalt an:

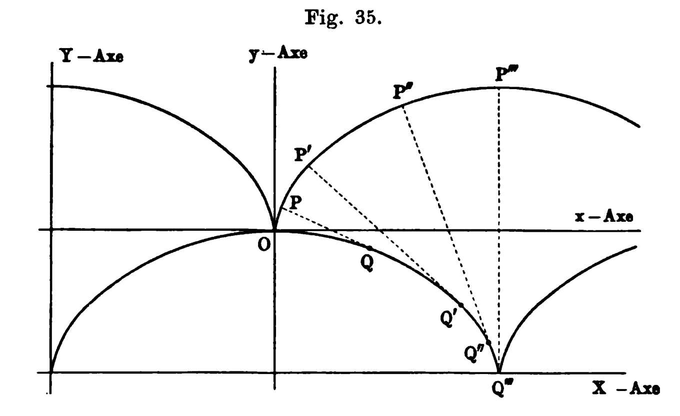
$$X = a\,(T - \sin T), \qquad Y = a\,(1 - \cos T).$$

Hierdurch ist eine mit der ursprünglichen congruente Cykloide dargestellt [vergl. (4), S. 38].

Wickelt man in Fig. 35 den Faden $\overline{Q'''P'''}$ nach links auf der Evolute auf, so gelangt man zum

Lehrsatz: *Die Bogenlänge eines einzelnen (zwischen zwei auf einander folgenden tiefsten Punkten gelegenen) Zweiges der Cykloide ist achtmal so gross, als der Radius a des rollenden Kreises.* —

Fig. 35.

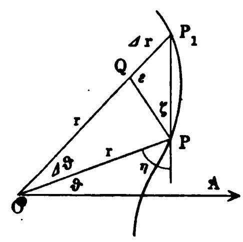


Aus Nr. 7 folgert man noch, dass einem Wendepunkte von C ein „unendlich ferner“ Punkt der Evolute zugehört, wobei die Normale von C im Wendepunkte „Asymptote“ der Evolute wird.

10. Einführung der Polarcoordinaten.

Ein Punkt O der Ebene sei als „*Pol*“ und ein von O auslaufender Strahl OA als „*Axe*“ eines Polarcoordinatensystems fixirt. Die Polarcoordinaten r, ϑ eines Punktes P der Ebene sind dann der „*Radius vector*“ $\overline{OP} = r$ und die „*Amplitude*“ $\vartheta = \measuredangle AOP$ (vergl. Fig. 36).

Fig. 36.



Es sei eine beliebige Curve C vorgelegt, deren Gleichung etwa die Gestalt $r = f(\vartheta)$ habe.

In Fig. 36 sind auf C zwei Punkte P und P_1 der Coordinaten r, ϑ und $r + \Delta r$, $\vartheta + \Delta\vartheta$ fixirt, und es ist $\overline{OQ} = \overline{OP}$ gemacht, so dass man hat:

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{PQ} = 2r\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right), \quad \overline{P_1Q} = \Delta r, \\ \measuredangle\, OPQ = \measuredangle\, OQP = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\vartheta}{2}. \end{cases}$$

Die Definition von ε, ζ und η entnehme man aus Fig. 36; es ist:

$$(2) \quad . \; . \; . \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\vartheta}{2}, \qquad \zeta = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\vartheta}{2} - \eta.$$

Durch Betrachtung des Dreiecks PQP_1 ergiebt sich vermöge (1) und (2):

$$(3) \qquad \begin{cases} \overline{PP_1}^2 = \Delta r^2 + 4r^2\sin^2\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right) + 4r\,\Delta r\sin^2\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right), \\ \cos\left(\eta - \frac{\Delta\vartheta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)\cdot\frac{\Delta r}{\overline{PP_1}}. \end{cases}$$

Die Division der ersten Gleichung durch $\Delta\vartheta^2$ liefert:

$$(4) \qquad \left(\frac{\overline{PP_1}}{\Delta\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta\vartheta}\right)^2 + r^2\left(\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\right)^2 + r\,.\,\Delta r\cdot\left(\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\right)^2.$$

Der Quotient der Sehne $\overline{PP_1}$ und des zugehörigen Bogens Δs wird für *lim.* $\Delta\vartheta = 0$ gleich ± 1; somit folgt aus (4):

$$(5) \qquad \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2 \quad \text{oder} \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

während sich daraufhin aus (3) ergiebt:

$$(6) \quad \cos\eta = \frac{dr}{ds}, \quad tg^2\eta = \frac{1}{\cos^2\eta} - 1 = \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 - 1 = \left(\frac{r\,d\vartheta}{dr}\right)^2.$$

Lehrsatz: *In Polarcoordinaten drücken sich das Bogendifferential und die Function tg des Winkels η zwischen Radius vector und Tangente von C im Punkte P, wie folgt, aus:*

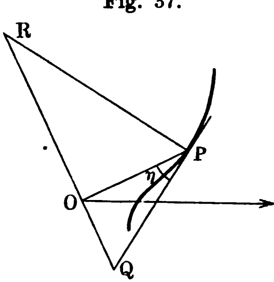
$$(7) \quad . \; . \; . \quad ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}, \qquad tg\,\eta = \frac{r\,d\vartheta}{dr}.$$

Das Vorzeichen der rechten Seite der letzten Formel ist richtig fixirt, da η spitz (stumpf) ist, wenn r mit ϑ gleichändrig (ungleichändrig) ist (vergl. Fig. 36).

11. Erklärung von Polartangente, Polarnormale u. s. w.

In Fig. 37 ist in O auf dem Radius vector $\overline{OP}$ des Punktes P die Gerade $\overline{QR}$ senkrecht gezogen; und es sind Tangente und Normale von C im Punkte P bis zu ihren Schnittpunkten Q und R mit jener Senkrechten gezogen.

Fig. 37.



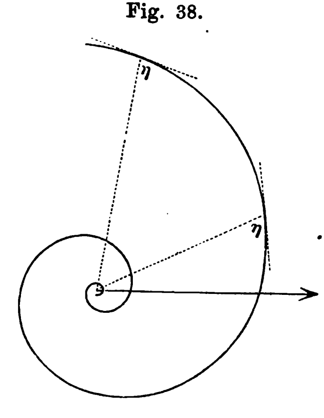
Erklärung: *Die Strecken* $\overline{PQ}$ *und* $\overline{PR}$ *heissen die zum Punkte* P *von* C *gehörende „Polartangente“* T *und „Polarnormale“* N; *entsprechend heissen die Strecken* $\overline{OQ}$ *und* $\overline{OR}$ *„Polarsubtangente“* St *und „Polarsubnormale“* Sn.

Durch Betrachtung der Dreiecke in Fig. 37 folgt der

Lehrsatz: *Für die Polartangente* T *u. s. w. gelten die Formeln:*

$$(1) \quad . \quad . \quad T = r\frac{ds}{dr}, \quad N = \frac{ds}{d\vartheta}, \quad St = \frac{r^2 d\vartheta}{dr}, \quad Sn = \frac{dr}{d\vartheta}.$$

Fig. 38.



Besonders geeignet sind die Polarcoordinaten zur Untersuchung der *Spiralen.*

Ein Beispiel liefere die durch:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r = e^{a\vartheta}$$

gegebene *logarithmische Spirale*, deren Verlauf Fig. 38 andeutet. Die logarithmische Spirale hat sowohl nach aussen wie auch in der Richtung auf den Pol O unendlich viele Windungen.

Aus (2) ergiebt sich:

$$(3) \quad \begin{cases} tg\,\eta = \frac{1}{a}, \quad T = r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}, \\ N = r\sqrt{1+a^2}, \quad St = \frac{r}{a}, \quad Sn = ar. \end{cases}$$

Lehrsatz: *Für alle Punkte der logarithmischen Spirale hat der Winkel* η *den gleichen Werth; die Längen* T *und ebenso* N, St *und* Sn *sind für die verschiedenen Punkte der logarithmischen Spirale mit* r *proportional.*

VI. Capitel.

Grundlagen der Integralrechnung.

1. Begriff des unbestimmten Integrals.

Erklärung: *Die Fundamentalaufgabe der Integralrechnung lautet: Gegeben ist die Function $\varphi(x)$; man soll eine solche Function $f(x)$ angeben, deren Ableitung $f'(x)$ mit $\varphi(x)$ identisch ist.*

Die Auflösung dieser Aufgabe ist die zur Differentiation von $f(x)$ inverse Operation.

Von der gesuchten Function $f(x)$ ist unmittelbar das zu dx gehörende Differential $df(x) = \varphi(x)\,dx$ gegeben. Man kleidet demnach die Fundamentalaufgabe auch wohl in die

Erklärung: *Aus dem in der Gestalt $\varphi(x)\,dx$ gegebenen Differential $df(x)$ soll die Function $f(x)$ selbst hergestellt werden. Diesen Uebergang bezeichnet man als „Integration" des Differentials $df(x) = \varphi(x)\,dx$, und das Resultat dieser Operation, d. i. $f(x)$, heisst „Integral" des Differentials $df(x) = \varphi(x)\,dx$, oder kurz „Integral von $\varphi(x)\,dx$".*

Um durch eine Formel auszudrücken, dass die Integration von $\varphi(x)\,dx$ auf $f(x)$ führt, schreibt man:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x) = \int \varphi(x)\,dx.$$

Erklärung: *Man hat hiernach das Zeichen $\int$ als „Integral von" zu lesen; und die Formel (1) bringt nichts anderes zum Ausdruck, als dass das Differential $df(x) = \varphi(x)\,dx$ oder die Ableitung $f'(x) = \varphi(x)$ sei.*

Weiter unten wird gezeigt, *dass es für jedes mit einer elementaren Function $\varphi(x)$ gebildete Differential $\varphi(x)\,dx$ ein Integral $f(x)$ giebt.*

Ist neben $f(x)$ auch $g(x)$ ein Integral von $\varphi(x)\,dx$, so haben $f(x)$ und $g(x)$ gleiche Ableitungen; und also ist für die Function $F(x) = g(x) - f(x)$ die Ableitung $F'(x)$ beständig gleich 0.

Hieraus folgt, dass für die Function $y = F(x)$ der in Fig. 14 (S. 16) mit α bezeichnete Winkel beständig gleich 0 ist, und dass also die zu $y = F(x)$ gehörende Curve eine Parallele zur x-Axe ist.

Die Function $F(x)$ hat somit für alle x den gleichen Werth, sie ist eine Constante C. Es muss sich also $g(x)$ in der Gestalt $f(x) + C$ darstellen lassen.

Nun hat andererseits die Function $[f(x) + C]$ bei willkürlich gewähltem C dieselbe Ableitung wie $f(x)$; also folgt der

Lehrsatz: *Das Integral eines gegebenen Differentials $\varphi(x)\,dx$ ist nur bis auf eine willkürlich wählbare additive Constante C eindeutig bestimmt, d. h. mit $f(x)$ ist stets auch $f(x) + C$ Integral von $\varphi(x)\,dx$.*

C heisst die „*Integrationsconstante*"; bleibt der Werth von C unbestimmt, so spricht man von einem „*unbestimmten Integral*".

2. Unmittelbare Integration einiger Differentiale.

Soll ein gegebenes Differential $\varphi(x)\,dx$ integrirt werden, so ist man zunächst darauf angewiesen, in den Formeln der Differentialrechnung nach einer Function $f(x)$ zu suchen, für welche $f'(x) = \varphi(x)$ wird.

Indem man sogleich die einfachsten Differentialformeln

$$d f(x) = \varphi(x)\,dx \quad \text{in} \quad f(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

d. h. in die entsprechenden Integralformeln umschreibt, ergiebt sich folgendes erste Formelsystem:

(1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (für alle ganzen und gebrochenen Zahlen m),

(2) $\int \frac{dx}{x} = \log x,$ (3) $\int e^x\,dx = e^x,$

(4) $\int \cos x\,dx = \sin x,$ (5) $\int \sin x\,dx = -\cos x,$

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$ (7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$ (9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$

Der Kürze halber sind hier überall die Integrationsconstanten C ausgelassen.

3. Zwei Hülfssätze zur Integration der Differentiale.

Gelten die beiden Formeln:

(1) . . . $d f(x) = f'(x)\,dx$ und $d g(x) = g'(x)\,dx,$

so liefert der erste Lehrsatz in Nr. 5, S. 17:

(2) . . . . $d\,[f(x) \pm g(x)] = [f'(x) \pm g'(x)]\,dx.$

Setzt man nun $f'(x) = \varphi(x)$, $g'(x) = \psi(x)$, so folgt aus (1):

(3) . . . $f(x) = \int \varphi(x)\,dx, \quad g(x) = \int \psi(x)\,dx,$

und die zu (2) gehörende Integralformel:

$$(4) \quad \ldots \quad \int [\varphi(x) \pm \psi(x)]\, dx = f(x) \pm g(x)$$

liefert vermöge (3):

$$(\text{I}) \quad \ldots \int [\varphi(x) \pm \psi(x)]\, dx = \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x)\, dx.$$

Lehrsatz: *Eine Summe oder Differenz wird integrirt, indem man jedes Glied integrirt und die entspringenden Integrale addirt bezw. subtrahirt.*

Ist $f'(x) = \varphi(x)$, so liefert Formel (4), S. 18:

$$(5) \quad \ldots \quad d\,[af(x)] = af'(x)\, dx = a\,\varphi(x)\, dx.$$

Die zugehörige Integralformel:

$$(6) \quad \ldots \quad \int a\,\varphi(x)\, dx = af(x) = a \int \varphi(x)\, dx$$

liefert:

$$(\text{II}) \quad \ldots \quad \int a\,\varphi(x)\, dx = a \int \varphi(x)\, dx.$$

Lehrsatz: *Ein constanter Factor des zu integrirenden Differentials darf vor das Integralzeichen gesetzt werden.*

Beispiele zu Nr. 2 und Nr. 3 sind:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\, dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\int \left(2x^3 - \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = C + {}^1/_2\, x^4 - 14\sqrt{x} + 3 \arcsin x.$$

Hier ist beide Male die Integrationsconstante zugefügt.

4. Integration durch Substitution einer neuen Variabelen.

Erklärung: *In vielen Fällen gelingt die Integration von $\varphi(x)\,dx$ durch Einführung einer Hülfsvariabelen z vermöge*

$$(1) \quad \ldots \quad x = \psi(z), \quad dx = \psi'(z)\, dz.$$

Die „Substitution“ von $\psi(z)$ für x liefert:

$$(2) \quad \ldots \int \varphi(x)\, dx = \int \varphi[\psi(z)] \cdot \psi'(z)\, dz = \int \Phi(z)\, dz.$$

Kann man das letzte Integral als Function $F(z)$ angeben, so liefert endlich die Wiedereinführung von x das gesuchte Integral:

$$(3) \quad \ldots \int \varphi(x)\, dx = \int \Phi(z)\, dz = F(z) = f(x).$$

Führt man z. B. in $\int \sin(a + bx)\, dx$ die Variabele z vermöge $a + bx = z$, $b\,dx = dz$ ein, so ergiebt sich:

$$(4)\quad \int sin\,(a+b\,x)\,d\,x = \frac{1}{b}\int sin\,z\,d\,z = -\frac{cos\,z}{b} = -\frac{cos\,(a+b\,x)}{b}.$$

Bei den folgenden Beispielen ist immer die zur Berechnung des Integrals geeignete Substitution in Klammern angegeben:

$$(5)\quad \int \frac{d\,x}{x+a} = log\,(x+a), \qquad [x+a=z],$$

$$(6)\quad \int cos\,(5+7\,x)\,d\,x = {}^1/_7\, sin\,(5+7\,x), \qquad [5+7\,x=z],$$

$$(7)\quad \int e^{k\,x}\,d\,x = \frac{1}{k}\cdot e^{k\,x}, \qquad [k\,x=z],$$

$$(8)\quad \int \frac{d\,x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right), \qquad [x=a\,z],$$

$$(9)\quad \int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\,sin\left(\frac{x}{a}\right), \qquad [x=a\,z],$$

$$(10)\quad \int \frac{x\,d\,x}{a^2+x^2} = {}^1/_2\,log\,(a^2+x^2), \qquad [a^2+x^2=z],$$

$$(11)\quad \int tg\,x\,d\,x = -\,log\,cos\,x, \qquad [cos\,x=z],$$

$$(12)\quad \int \frac{d\,x}{sin\,x} = log\,tg\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \left[tg\left(\frac{x}{2}\right)=z\right].$$

Die Herstellung der Formel (8) gründet sich auf:

$$\frac{d\,x}{sin\,x} = \frac{d\,x}{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{d\,tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. Methode der partiellen Integration.

Aus Formel (2), S. 22 ergiebt sich:

$$(1)\quad .\;.\;d\,[\varphi(x)\,\chi(x)] = \varphi(x)\,\chi'(x)\,d\,x + \varphi'(x)\,\chi(x)\,d\,x,$$

$$(2)\quad .\;.\;\varphi(x)\,\chi(x) = \int \varphi(x)\,\frac{d\,\chi(x)}{d\,x}\,d\,x + \int \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\,\chi(x)\,d\,x.$$

Schreibt man in (2):

$$\frac{d\,\chi(x)}{d\,x} = \psi(x) \quad \text{und also} \quad \chi(x) = \int \psi(x)\,d\,x,$$

so folgt:

$$(3)\quad \int \varphi(x)\,\psi(x)\,d\,x = \varphi(x)\int \psi(x)\,d\,x - \int\left[\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\int \psi(x)\,d\,x\right]d\,x.$$

Erklärung: *Die in dieser Formel enthaltene Regel zur Berechnung von* $\int \varphi(x)\,\psi(x)\,d\,x$ *heisst die Regel oder Methode der „partiellen Integration“.*

Die partielle Integration verwendet man vielfach mit Vortheil bei der Integration gegebener Differentiale; Beispiele sind:

I. $\int \log x \, dx, \quad \varphi(x) = \log x, \quad \psi(x) = 1,$

$$\int \log x \, dx = \log x \int dx - \int \left[\frac{1}{x} \int dx\right] dx,$$

(4) $$\int \log x \, dx = x \log x - x.$$

II. $\int x \sin x \, dx, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \sin x,$

$$\int x \sin x \, dx = x \int \sin x \, dx - \int \left[\int \sin x \, dx\right] dx.$$

(5) $$\int x \sin x \, dx = - x \cos x + \sin x.$$

III. $\int \operatorname{arctg} x \, dx, \quad \varphi(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \psi(x) = 1,$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \int dx - \int \left[\frac{1}{1+x^2} \int dx\right] dx,$$

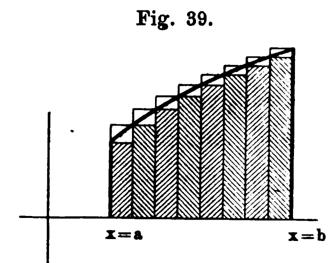
(6) $$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - {}^1/_2 \log(1 + x^2).$$

6. Begriff des bestimmten Integrals.

Es sei $y = \varphi(x)$ eine elementare Function, welche in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ (unter a und b endliche Werthe verstanden) eindeutig und stetig ist.

Der Einfachheit halber sei zunächst angenommen, dass $\varphi(x)$ im ganzen Intervall positiv und mit x gleichändrig ist.

Fig. 39.



Das über dem Intervall gelegene Stück der Curve $y = \varphi(x)$, sowie die zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten sind in Fig. 39 durch starkes Ausziehen hervorgehoben. Es möge das von der Curve, den genannten beiden Ordinaten und der x-Axe begrenzte Flächenstück den Inhalt J haben.

Zur angenäherten Berechnung von J theilen wir die zwischen a und b gelegene Strecke der x-Axe in n Theile, die zwar nicht nothwendig, aber zweckmässig einander gleich gewählt werden. Der einzelne Theil habe die Länge Δx, so dass man $b - a = n \cdot \Delta x$ hat.

Indem auch noch in den $(n - 1)$ Theilpunkten die Ordinaten $\varphi(a + \Delta x)$, $\varphi(a + 2 \Delta x)$, ..., $\varphi[a + (n - 1) \Delta x]$ errichtet werden, zerfällt die fragliche Fläche in n Streifen. Vom einzelnen Streifen schneide man ein (in der Fig. 39 schraffirtes) Reckteck ab, indem

man durch den Endpunkt der linken Ordinate eine Parallele zur x-Axe zieht.

Der Gesammtinhalt J_n der n Rechtecke ist:

$$(1)\quad J_n = \varphi(a)\Delta x + \varphi(a + \Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a + (n-1)\Delta x]\Delta x.$$

Führt man diese Operation wiederholt, und zwar für immer grössere n durch, so gilt:

$$(2)\quad \lim_{n=\infty}\{\varphi(a)\Delta x + \varphi(a + \Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a + (n-1)\Delta x]\Delta x\} = J.$$

Zum Beweise vergrössere man den einzelnen der n Streifen (wie Fig. 39 andeutet) dadurch zu einem Rechteck, dass man durch den Endpunkt der rechten Ordinate eine Parallele zur x-Axe zieht. Der Gesammtinhalt J_n' der so entspringenden n Rechtecke ist:

$$(3)\quad J_n' = \varphi(a + \Delta x)\Delta x + \varphi(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi(b)\Delta x.$$

Aus Fig. 39, sowie aus (1) und (3) folgt:

$$(4)\quad . \quad . \quad J_n < J < J_n', \quad J_n' - J_n = [\varphi(b) - \varphi(a)]\Delta x;$$

also ist $\lim\limits_{n=\infty} J_n' = \lim\limits_{n=\infty} J_n = J.$

Die Formel (2) gilt auch dann noch, wenn $\varphi(x)$ im Intervall nicht oder nicht stets mit x gleichändrig, sowie wenn $\varphi(x)$ nicht oder nicht immer positiv ist. Es ist nur nöthig zu verabreden, dass, falls die Curve ganz oder theilweise unterhalb der x-Axe verläuft, die Inhalte der hierselbst zwischen Curve und Axe gelegenen Flächenstücke *negativ* in Rechnung zu stellen sind. So ist J im Falle der Fig. 40 die Summe der Inhalte der Stücke I und III, vermindert um den Inhalt von II.

Fig. 40.

Für $\lim. n = \infty$ gewinnt die in (1) definirte Summe eine über alle Grenzen gross werdende Gliederanzahl und jedes Glied gewinnt die Rolle eines Differentials $\varphi(x)\,dx$. Deshalb setzt man:

$$(5)\quad \lim_{n=\infty}\{\varphi(a)\Delta x + \varphi(a + \Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a + (n-1)\Delta x]\Delta x\} = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

so dass hier das Zeichen $\int$ in einer zunächst neuen Bedeutung, nämlich als *Summenzeichen*, verwendet wird.

Erklärung: *Die in (1) erklärte Summe J_n bekommt für $\lim. n = \infty$ die Bedeutung einer Summe unendlich vieler Differentiale. Die so gedachte Summe wird mit der in (5) gegebenen typischen Bezeichnung $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ belegt. Dieser Ausdruck heisst ein „bestimmtes Integral“,*

und die unten und oben an das Summenzeichen gesetzten Grenzen a und b des der Betrachtung zu Grunde liegenden Intervalles heissen „die untere und die obere Grenze“ des Integrals. Das Intervall selbst heisse fortan „Integrationsintervall“.

Die Berechtigung und Brauchbarkeit des Begriffes des bestimmten Integrals ist gewährleistet durch folgenden

Lehrsatz: *Das bestimmte Integral* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *hat unter der Voraussetzung, dass die Grenzen a und b endlich sind, und dass* $\varphi(x)$ *im Integrationsintervall, die Grenzen eingeschlossen, eindeutig und stetig ist, den oben erklärten fest bestimmten Zahlwerth J.*

7. Zusammenhang zwischen den bestimmten und den unbestimmten Integralen.

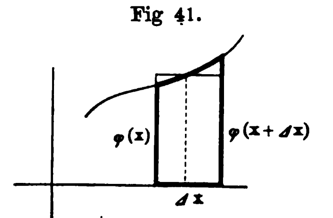
Die obere Grenze b des Integrals sei veränderlich und werde in diesem Sinne durch x statt durch b bezeichnet. Doch soll zunächst $x \geqq a$ sein, und im Intervall von a bis x müssen die wiederholt genannten Bedingungen für $\varphi(x)$ erfüllt sein.

Der Integralwerth J wird eine eindeutige stetige Function der oberen Grenze x, so dass zu setzen ist:

$$(1) \quad \ldots\ldots \int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x).$$

Man bilde nun $F(x + \varDelta x) - F(x)$, wo x für den Augenblick als fest gilt und $\varDelta x$ so klein gewählt sei, dass die Function $\varphi(x)$ im Intervall von x bis $(x + \varDelta x)$ mit x entweder nur gleichändrig oder nur ungleichändrig ist.

Fig 41.



Unter diesen Umständen ist $F(x + \varDelta x) - F(x)$, als Inhalt des in Fig. 41 stark umrandeten Bereiches, mit einem Rechteck der Grundlinie $\varDelta x$ und der in der Figur punktirt angedeuteten Höhe gleich. Letztere ist die Ordinate $\varphi(x + \vartheta \cdot \varDelta x)$ für ein gewisses, dem Intervalle von x bis $(x + \varDelta x)$ angehörendes Argument $(x + \vartheta \cdot \varDelta x)$, wo also $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist:

$$(2) \quad \ldots \begin{cases} F(x + \varDelta x) - F(x) = \varphi(x + \vartheta \cdot \varDelta x)\,\varDelta x, \\ \dfrac{F(x + \varDelta x) - F(x)}{\varDelta x} = \varphi(x + \vartheta \cdot \varDelta x). \end{cases}$$

Für $lim.\ \varDelta x = 0$ folgt $F'(x) = \varphi(x)$; *es ist somit die in (1) erklärte Function* $F(x)$ *ein Integral des Differentials* $\varphi(x)\,dx$ *im Sinne von S. 47, und hiermit ist zugleich der Existenzbeweis der unbestimmten Integrale erbracht.*

Denkt man nun vorab das unbestimmte Integral $\int \varphi(x)\, dx = f(x)$ nach S. 47 ff. berechnet, so folgt aus vorstehender Entwickelung:

$$(3) \quad . \quad . \; F(x) = f(x) + C \;\text{ und }\; \int_a^x \varphi(x)\, dx = f(x) + C.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C lassen wir x bis a abnehmen, so dass der Werth des bestimmten Integrals zu 0 wird:

$$0 = f(a) + C \quad \text{oder} \quad C = -f(a).$$

Durch Eintragung dieses Werthes in (3) und Wiedereinführung der Bezeichnung b für die obere Grenze folgt:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Lehrsatz: *Um das in (4) links stehende bestimmte Integral zu berechnen, integrire man zunächst unbestimmt* $\int \varphi(x)\, dx = f(x)$; *der Werth des bestimmten Integrals ist gleich der Differenz* $f(b) - f(a)$ *der Werthe von* $f(x)$ *für die Integralgrenzen.*

Eine zwar ungenaue, aber nützliche Auffassung der Formel (4) ist in folgender Ueberlegung enthalten.

Durchmisst man das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ in einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Schritte dx, und addirt man zum Anfangswerth $f(a)$ der Function $f(x) = \int \varphi(x)\, dx$ den jedem Schritte dx entsprechenden Zuwachs $df(x) = \varphi(x)\, dx$, so gelangt man schliesslich zum Endwerthe $f(b)$:

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f(a) + \int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b).$$

Endlich ist zu bemerken, *dass die obere Grenze b auch kleiner als die untere a sein darf.* Man hat dann das Intervall auf der x-Axe von rechts nach links zu durchmessen und entsprechend negative dx bezw. in den Formeln der voraufgehenden Nummern negative Δx zu benutzen. Der Begriff des bestimmten Integrals, sowie die Formel (4) behalten hierbei durchaus ihre Gültigkeit.

8. Integration bis $x = \infty$ oder bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi(x)$.

Ist $\varphi(x)$ für alle endlichen Werthe $x \geqq a$ eindeutig und stetig, so lasse man die obere Integralgrenze sich als stetige Variabele x dem Grenzwerthe ∞ annähern.

Erklärung: *Ergiebt sich bei diesem Grenzübergange ein bestimmter Grenzwerth:*

$$(1) \quad . \; . \; . \quad \lim_{x=+\infty} \int_a^x \varphi(x)\,dx = \lim_{x=+\infty} [f(x) - f(a)],$$

so definiren wir diesen Grenzwerth als den Werth des Integrals $\int_a^{+\infty}$ *mit der oberen Grenze* $+\infty$.

Entsprechende Festsetzungen finden statt, wenn die untere Integralgrenze gleich $+\infty$ wird, sowie wenn eine der Grenzen gleich $-\infty$ wird.

Das bestimmte Integral ist auch für den Fall noch nicht erklärt, dass $\varphi(x)$ für eine der Grenzen, etwa b, unstetig wird.

Erklärung: *Wird* $\varphi(x)$ *für* $x = b$ *unstetig durch Unendlichwerden, so soll:*

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{x=b} \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

sein, falls bei dem angedeuteten Grenzübergange ein bestimmter Grenzwerth eintritt. Anderenfalls darf die Integration nicht bis $x = b$ *ausgedehnt werden.*

9. Lehrsätze über bestimmte Integrale.

Lehrsatz: *Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals oder aus Formel (4), S. 54 ergeben sich die in folgenden Formeln enthaltenen Regeln:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_b^a \varphi(x)\,dx = -\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_a^a \varphi(x)\,dx = 0,$$

$$(3) \quad . \; . \; . \quad \int_a^c \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^c \varphi(x)\,dx. -$$

Es seien die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig, und $\psi(x)$ sei daselbst nirgends negativ und nicht stets Null. Der grösste Werth von $\varphi(x)$ im Intervall sei M, der kleinste m. Dann gilt, dx als positiv vorausgesetzt:

$$m\,\psi(x)\,dx \leqq \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \leqq M\,\psi(x)\,dx$$

für das ganze Intervall; und also folgt weiter:

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx \leqq \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Setzt man somit zur Abkürzung:

$$(4) \quad \ldots \frac{\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_a^b \psi(x)\,dx} = Q, \quad \text{so ist} \quad m \leqq Q \leqq M.$$

Da nun die *stetige* Function $\varphi(x)$ für einen bestimmten Werth x des Intervalles $= M$ und für einen gewissen anderen Werth $= m$ wird, so lässt sich zwischen jenen beiden Werthen x und also im Intervall ein Werth $x = c$ angeben, für welchen $\varphi(x)$ den zwischen M und m gelegenen Werth Q annimmt. Die Substitution $Q = \varphi(c)$ in die Gleichung (4) liefert den

Mittelwerthsatz: *Sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig, und ist $\psi(x)$ daselbst nirgends negativ und nicht überall gleich Null, so lässt sich im Intervall ein Werth $x = c$ angeben, für den die Gleichung gilt:*

$$(5) \quad \ldots \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(c)\int_a^b \psi(x)\,dx, \quad a \leqq c \leqq b.$$

10. Quadratur ebener Curven.

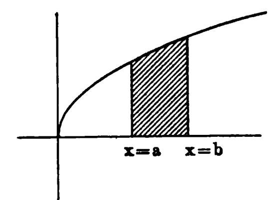
Aus den Betrachtungen von S. 51 ff. entspringt folgender

Lehrsatz: *Ist eine ebene Curve C gegeben, welche für jede dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ angehörende Abscisse x eine und nur eine Ordinate $y = \varphi(x)$ aufweist, so ist der Inhalt J der von der Curve, der Abscissenaxe und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten eingeschlossenen Gesammtfläche:*

$$(1) \quad \ldots\ldots J = \int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Die Maasszahlen von Flächentheilen *unterhalb* der x-Axe kommen hierbei *negativ* in Rechnung (vergl. Fig. 40, S. 52).

Fig. 42.



Die in (1) geleistete Inhaltsbestimmung heisst „*Quadratur der Curve C*".

Erstes Beispiel. Es soll das in Fig. 42 schraffirte, nach oben hin durch die Parabel $y^2 = 2px$ begrenzte Flächenstück berechnet werden.

Hier ist $y = +\sqrt{2px}$, und also folgt aus (1):

$$J = \int_a^b y\,dx = \int_a^b \sqrt{2px}\,dx.$$

Die unbestimmte Integration liefert das Resultat:

$$\int \sqrt{2px}\,dx = {}^2/_3\, x\sqrt{2px},$$

und also gewinnt man für J den Ausdruck:

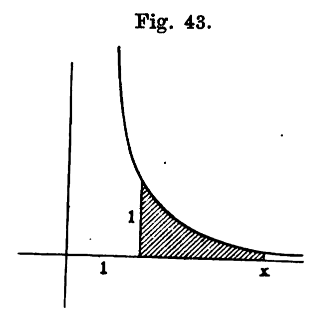


Fig. 43.

$$(2)\qquad J = {}^2/_3\left(b\sqrt{2pb} - a\sqrt{2pa}\right),$$

welcher einer interessanten geometrischen Deutung fähig ist.

Zweites Beispiel. Es soll die Quadratur der durch $x^2y = 1$ gegebenen und in Fig. 43 dargestellten Curve zwischen den Grenzen 1 und $x > 1$ geleistet werden. Der Ansatz (1) liefert hier:

$$(3)\qquad J = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{x},$$

so dass in diesem Falle die Integration bis $x = +\infty$ ausgedehnt werden kann: J nähert sich dabei der Grenze 1.

11. Rectification ebener Curven.

Betreffs der Curve C sollen die Voraussetzungen von Nr. 10 auch hier gelten.

Sieht man die *Bogenlänge* von C, gemessen von einem fest gewählten Anfangspunkt bis zum Punkte der Coordinaten x und $y = \varphi(x)$, als Functionen von x an, so ist nach S. 37:

$$(1)\quad .\ .\quad ds = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \pm\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Nimmt man an, dass die Bogenlänge im Intervall $a \leqq x \leqq b$ mit x gleichändrig ist, so gilt in (1) das obere Zeichen.

Denkt man den über dem Intervall gelegenen Bogen von C in unendlich viele Differentiale ds zerlegt, so ist umgekehrt die Summe der letzteren gleich jenem Bogen.

Lehrsatz: *Die Länge s der Curve C zwischen den Punkten der Coordinaten a, $\varphi(a)$ und b, $\varphi(b)$ ist gegeben durch das bestimmte Integral:*

$$(2)\qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Die Berechnung der Bogenlänge heisst „*Rectification der Curve C*“.

Beispiel. Im Falle der *Cykloide* benutzt man an Stelle von x zweckmässig den Wälzungswinkel t als unabhängige Variabele. Die Länge s eines Zweiges der Cykloide wird dann:

$$s = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt,$$

wie man mit Hülfe der Formeln von S. 37 und 38 feststellt.

Ersetzt man $\sqrt{1 - \cos t}$ durch $\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, so folgt weiter:

$$(3) \qquad s = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4a\,(-\cos\pi + \cos 0) = 8a,$$

womit ein bereits S. 44 ausgesprochenes Resultat bestätigt ist.

12. Gebrauch der Polarcoordinaten.

Eine Curve C sei durch ihre Gleichung in Polarcoordinaten r, ϑ gegeben (vergl. S. 45), und es werde ein solches Stück der Curve betrachtet, welches zu jedem dem Intervall $\alpha \leqq \vartheta \leqq \beta$ angehörenden ϑ einen und nur einen Radius vector $r = \varphi(\vartheta)$ liefert.

Fig. 44.

Die Radien vectoren nach den beiden einander unendlich nahen Punkten P, P_1 der Curve schliessen im Verein mit dem Bogenelemente $\widehat{PP_1}$ einen unendlich schmalen Sector des Winkels $d\vartheta$ ein, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2} r^2\, d\vartheta$ ist (vergl. Fig. 44).

Ist die Maasszahl der Bogenlänge im Intervall mit ϑ gleichändrig, so ist das Bogendifferential nach S. 45 durch $\sqrt{r^2\, d\vartheta^2 + dr^2}$ gegeben.

Durchmisst man das Intervall von $\vartheta = \alpha$ bis $\vartheta = \beta$ in unendlich kleinen Schritten $d\vartheta$ und bildet einmal die entsprechende Summe der Flächendifferentiale $\frac{1}{2} r^2\, d\vartheta$, sodann diejenige der Bogendifferentiale ds, so ergiebt sich der

Lehrsatz: *Der Inhalt J derjenigen Fläche, welche durch die zu $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta$ gehörenden Radien vectoren und das dazwischen liegende Stück der Curve begrenzt wird, ist gegeben durch:*

$$(1) \quad \ldots\ldots J = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2\, d\vartheta = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\varphi(\vartheta)]^2\, d\vartheta;$$

die Länge s jenes Curvenstückes aber ist gegeben durch:

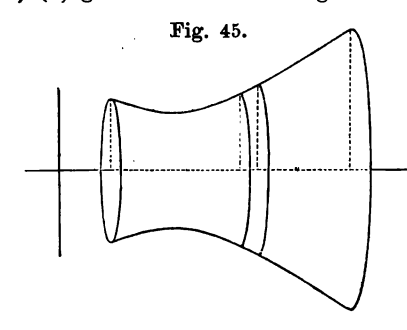
$$(2) \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + [\varphi'(\vartheta)]^2}\, d\vartheta.$$

13. Cubatur der Rotationskörper.

Es sei $y = \varphi(x)$ eine Function, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ eindeutig, stetig und positiv ist.

Man denke das über dem Intervall gelegene Stück der Curve von $\varphi(x)$ gezeichnet und erzeuge durch Rotation desselben um die x-Axe einen Rotationskörper, den man sich durch zwei in $x = a$ und $x = b$ zur x-Axe senkrecht gelegte Ebenen begrenzt denke.

Fig. 45.



Zwei in den Punkten x und $(x + dx)$ zur x-Axe senkrecht errichtete Ebenen schneiden aus dem Rotationskörper eine unendlich schmale Scheibe vom Voluminhalt $\pi y^2\, dx = \pi [\varphi(x)]^2\, dx$ aus (siehe hier überall Fig. 45).

Durch Zerlegung des ganzen Rotationskörpers in Scheiben dieser Art entspringt der

Lehrsatz: *Der Voluminhalt V des in der bezeichneten Art eingegrenzten Rotationskörpers ist durch das Integral gegeben:*

$$(1) \quad \ldots\ldots V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx$$ [1].

Die vermöge (1) zu vollziehende Bestimmung des Cubikinhaltes V bezeichnet man als „*Cubatur*" des Rotationskörpers.

Beispiel: Zur Volumberechnung eines *geraden Kreiskegels* von der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche hat man zu setzen:

$$y = \frac{r}{h} x, \quad a = 0, \quad b = h.$$

Formel (1) liefert alsdann für das Volumen:

$$(2) \quad . . V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = {}^1/_3\, \pi r^2 h.$$

14. Complanation der Rotationsoberflächen.

Die in Nr. 13 aus dem Rotationskörper ausgeschnittene unendlich schmale Scheibe ist nach aussen durch einen auf der Rotationsober-

[1]) Streng genommen hat man die Ueberlegung zur Bildung des bestimmten Integrals (1) durch einen Grenzübergang zu begründen, welcher in jeder Hinsicht an dem S. 52 vollzogenen Grenzübergang sein Vorbild findet.

fläche gelegenen Gürtel begrenzt, welcher als Mantel eines abgestumpften Kegels angesehen werden kann.

Der Mantel dieses Kegels hat den Flächeninhalt $2\pi y ds$, und von hieraus gewinnt man [1]) den

Lehrsatz: *Die durch Rotation des in Nr. 13 besprochenen Curvenstückes $y = \varphi(x)$ entstehende Oberfläche hat den Flächeninhalt:*

$$(1) \qquad S = 2\pi \int_a^b y \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx.$$

Die Berechnung des Inhaltes S heisst „*Complanation*" der Oberfläche.

Beispiel: Zur Complanation der *Halbkugel* setze man:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad a = 0, \quad b = r$$

und findet vermöge des Ansatzes (1):

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad S = 2\pi r \int_0^r dx = 2\pi r^2.$$

VII. Capitel.

Theorie der unendlichen Reihen.

1. Begriffe der Convergenz und Divergenz einer Reihe.

Es seien $u_0, u_1, u_2, \ldots$ reelle Grössen in unendlicher Anzahl:

Erklärung: *Die aus den „Gliedern" $u_0, u_1, u_2, \ldots$ aufgebaute unendliche Reihe:*

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

heisst „convergent", wenn die Summe S_n der n ersten Glieder:

$$(2) \quad \ldots \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

---

[1]) Um hier exact zu verfahren, benutze man die Formel $\pi(y + y_1)\Delta s$ für den Mantel des abgestumpften Kegels der Seite Δs und der Radien y, y_1 der Grundflächen. Theilt man die Curve $y = \varphi(x)$ über dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ in n *gleiche* Theile Δs und führt die Integralbildung nach S. 52 durch, so folgt die Formel (1) des Textes.

für lim. $n = \infty$ *einer „bestimmten endlichen" Grenze* S *zustrebt; ist dies nicht der Fall, so heisst die Reihe „divergent". Im ersten Falle heisst* S *der „Summenwerth" oder kurz der „Werth" der Reihe (1).*

Eine *convergente* Reihe liegt z. B. in der geometrischen Reihe:

$$(3) \quad \ldots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

vor. Man hat hier nämlich:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

und also ist $S = \lim_{n=\infty} S_n = 2$ (vergl. den Schlusssatz in Nr. 12, S. 11).

Dem gegenüber hat man das Beispiel einer *divergenten* Reihe in:

$$(4) \quad \ldots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots.$$

Setzt man nämlich $n = 2^m$, so ist:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Hier ist in der einzelnen der $(m - 1)$ Klammern das letzte Glied $\frac{1}{2^k}$ stets das kleinste, und in der Klammer stehen 2^{k-1} Glieder. Der Zahlwerth der einzelnen Klammer ist somit $> \frac{1}{2}$, und man hat:

$$S_n > 1 + \frac{m}{2},$$

so dass für *lim.* $n = \infty$ keine endliche Grenze S eintritt.

Divergent ist auch die Reihe:

$$(5) \quad \ldots \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots;$$

denn obschon hier die Summe S_n mit wachsendem n nicht über alle Grenzen wächst, so nähert sich doch S_n keiner *bestimmten* Grenze.

2. Lehrsätze über convergente Reihen.

Lehrsatz I: *Für eine convergente Reihe gilt* $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, *d. h. die Glieder derselben nähern sich einzeln genommen mit wachsendem Index* n *der Grenze 0.*

Denn es ist $S_{n+1} - S_n = u_n$; und da sich für *lim.* $n = \infty$ links Minuend und Subtrahend der gleichen Grenze S annähern, so ist *lim.* $u_n = 0$.

Die Reihe (4) in Nr. 1 zeigt, dass die Bedingung $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ zur Convergenz nicht ausreicht.

Lehrsatz II: *Eine convergente (divergente) Reihe bleibt convergent (divergent), falls man derselben neue Anfangsglieder in endlicher A...* *vorsetzt oder derselben eine endliche Anzahl ihrer Anfangsgliede...*

Lehrsatz III: *Für eine Reihe mit ausschliesslich positiven Gl...* u_n *ist entweder* $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$, *oder die Reihe ist convergent.*

Da nämlich $S_{n+1} > S_n$ ist, so werden die S_n mit wachsendem Index n entweder über alle Grenzen gross werden, oder es giebt eine bestimmte endliche Grenze S, der die S_n ohne Ende nahe kommen, ohne sie zu überschreiten. —

Streicht man aus einer unendlichen Reihe irgend welche Glieder fort, jedoch so, dass noch eine unendliche Reihe übrig bleibt, so nennt man die letztere einen „*Bestandtheil*" der gegebenen Reihe.

Lehrsatz IV: *Jeder Bestandtheil einer convergenten Reihe mit ausschliesslich positiven Gliedern liefert wieder eine convergente Reihe.*

Ist nämlich S der Werth der gegebenen Reihe und S'_n die Summe der n ersten Glieder des Bestandtheiles, so gilt $S'_n < S$.

Lehrsatz V: *Eine Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *ist jedenfalls dann convergent, wenn die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$$

convergent ist (vergl. S. 10).

Nach Lehrsatz II ist diese Behauptung offenbar richtig, wenn in der gegebenen Reihe nur *endlich viele* negative (positive) Glieder vorkommen.

Ist dies nicht der Fall, so streiche man in (1) alle die Glieder, welche negativen Gliedern u_n entsprechen, und möge so:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

als Bestandtheil von (1) gewinnen. Durch Streichung aller positiven Gliedern u_n zugehörigen Glieder in (1) folge:

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots.$$

Schreibt man $S'_l = v_0 + v_1 + \cdots + v_{l-1}$ und $S''_m = w_0 + w_1 + \cdots + w_{m-1}$, so giebt es nach Lehrsatz IV zwei bestimmte endliche Grenzen:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad S' = \lim_{l=\infty} S'_l, \qquad S'' = \lim_{m=\infty} S''_m.$$

Sind nun unter den n ersten Gliedern der ursprünglichen Reihe l positive und $m = n - l$ negative, so ist:

$$(5) \quad . \; . \; . \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = S_n = S'_l - S''_m.$$

Damit ergiebt sich vermöge (4) in der That eine bestimmte endliche Grenze:

$$(6) \quad . \; . \; . \quad S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{l=\infty} S'_l - \lim_{m=\infty} S''_m = S' - S'';$$

denn zufolge der Annahme sollten mit *lim.* $n = \infty$ auch l und m über alle Grenzen wachsen.

3. Convergenzkriterium für Reihen aus positiven Gliedern.

Princip der Reihenvergleichung: *Es seien zwei Reihen aus nur positiven Gliedern vorgelegt:*

$$(1) \quad . \; . \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \textit{und} \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots,$$

und es sei bekannt, dass die zweite Reihe convergent (divergent) ist. Wenn alsdann von einem gewissen endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung $u_k \leqq v_k$ (bezw. $u_k \geqq v_k$) erfüllt ist, so ist auch die erste Reihe convergent (divergent).

Vermöge dieses Princips beweist man folgenden

Lehrsatz: *Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ aus nur positiven Gliedern ist convergent, wenn sich eine solche positive Zahl $r < 1$ angeben lässt, dass von einem bestimmten endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung besteht:*

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqq r < 1.$$

Aus (2) folgt nämlich:

$$u_{m+1} \leqq r u_m, \quad u_{m+2} \leqq r u_{m+1} \leqq r^2 u_m, \ldots,$$
$$u_{m+n} \leqq r u_{m+n-1} \leqq \cdots \leqq r^n u_m.$$

Setzt man daraufhin:

$$v_i = u_i \text{ für } i \leqq m \quad \text{und} \quad v_k = r^{k-m} u_m \text{ für } k \geqq m,$$

so wird die Bedingung $u_k \leqq v_k$ für alle Indices gelten.

Nun ist die Reihe der v wegen $0 < r < 1$ sicher convergent (vergl. S. 11) und hat den Summenwerth:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1} + u_m \cdot \frac{1}{1-r};$$

der zu beweisende Lehrsatz ergiebt sich somit vermöge des Princips der Reihenvergleichung.

Lehrsatz: *Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ aus lauter nicht verschwindenden positiven Glieder ist divergent, falls von einem bestimmten endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung gültig ist:*

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqq 1.$$

In diesem Falle ist nämlich bereits die zur Convergenz nothwendige Bedingung $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ nicht erfüllt.

Reihen, bei denen $\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist, können auf ihre Convergenz oder Divergenz auf Grund der bisherigen Sätze noch nicht untersucht werden. Hierher gehört z. B. die Reihe (4), S. 61, bei welcher man hat:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}},$$

so dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder für $\lim. n = \infty$ in der That die Grenze 1 hat.

Von der Aufstellung genauerer Convergenzkriterien wird indess hier abgesehen.

4. Bedingt und unbedingt convergente Reihen.

Erklärung: *Eine convergente Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, welche sowohl positive, als auch negative Glieder in unendlicher Anzahl aufweist, heisst unbedingt (bedingt) convergent, falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

(1) . . . . $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$

convergent (divergent) ist.

Im Anschluss an (1) definire man die beiden Reihen:

(2) $\quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ und $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$

wie in Nr. 2 und gebrauche auch die dort erklärten Bezeichnungen S'_l, $S''_m \ldots$

Geht die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ durch eine beliebige „*Neuanordnung*“ der Glieder in $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots$ über, so wird jedes Glied u_i der ersten Reihe sich als ein Glied u'_k der zweiten auffinden lassen und andererseits auch jedes Glied u'_l der zweiten Reihe als ein u_m in der ersten.

Lehrsatz: *Eine unbedingt convergente Reihe des Summenwerthes S behält auch nach einer beliebigen Neuanordnung der Glieder denselben Summenwerth S; der Werth S einer unbedingt convergenten Reihe ist somit von der Gliederanordnung unabhängig.*

In diesem Falle sind nämlich die beiden Reihen (2) convergent.

Da nun mit $\lim. n = \infty$ auch $\lim. l = \infty$ und $\lim. m = \infty$ anzunehmen ist, so kann man nach Auswahl einer beliebig kleinen, positiven und nicht verschwindenden Zahl δ den Index n so gross wählen, dass:

(3) . . . $0 < S' - S'_l < \delta, \qquad 0 < S'' - S''_m < \delta$

ist.

Für die Neuanordnung $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots$ definiren wir entsprechende Reihen (1) und (2) und benutzen für die Summe von Anfangsgliedern das Zeichen Σ an Stelle von S. Kommen somit unter den n' ersten Gliedern der Neuanordnung l' positive und m' negative vor, so ist $\Sigma_{n'} = \Sigma'_{l'} - \Sigma''_{m'}$.

Nun wähle man n' so gross, dass alle Glieder von S_n sich auch in $\Sigma_{n'}$ finden. Dann ist auch $\Sigma'_{l'} \geqq S'_l$ und $\Sigma''_{m'} \geqq S''_m$; und da überdies

$\Sigma'_{l'} < S'$, $\Sigma''_{m'} < S''$ gilt (vergl. den Beweis zum Lehrsatz III, S. 62), so folgt vermöge (3):

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad 0 < S' - \Sigma'_{l'} < \delta, \qquad 0 < S'' - \Sigma''_{m'} < \delta.$$

Durch Subtraction folgt weiter:

$$-\delta < (S' - S'') - (\Sigma'_{l'} - \Sigma''_{m'}) < \delta,$$
$$-\delta < S - \Sigma_{n'} < \delta,$$

so dass $\lim_{n'=\infty} \Sigma_{n'} = S$ ist, w. z. b. w. —

Lehrsatz: *Eine bedingt convergente Reihe lässt sich in eine solche Neuanordnung bringen, dass der Summenwerth eine beliebig gewählte positive oder negative Zahl S ist.*

In diesem Falle sind nämlich beide Reihen (2) divergent; denn wären sie beide convergent, so wäre auch die Reihe (1) convergent; und wäre die eine Reihe (2) convergent und die andere divergent, so könnte $S_n = S'_l - S''_{m'}$ für $\lim. n = \infty$ nicht endlich sein.

Es lässt sich demnach, wenn etwa $S > 0$ ist, ein endlicher Index n_1 so wählen, dass:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n_1-1} \leqq S < v_0 + v_1 + \cdots + v_{n_1}$$

zutrifft. Demnächst reihe man die ersten negativen Glieder $-w_0$, $-w_1, \ldots$ an und bestimme den Index m_1 so, dass man hat:

$$v_0 + \cdots + v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1-1} \geqq S > v_0 + \cdots + v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1}.$$

Jetzt folgt die Anreihung von $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots, v_{n_2}$, und zwar so, dass:

$$(5) \qquad v_0 + \cdots + v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + \cdots + v_{n_2},$$

aber noch nicht die nächst voraufgehende Summe, den Betrag S übertrifft. Ein solcher endlicher Index n_2 lässt sich auffinden, da die Reihe $v_0 + v_1 + \cdots$ auch nach Fortnahme der $(n_1 + 1)$ ersten Glieder divergent bleibt (Lehrsatz II, S. 62).

Vermöge des so eingeleiteten alternirenden Verfahrens bringe man alle Glieder der ursprünglichen Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ unter.

Dabei ist der Ueberschuss der Summe (5) über S nicht grösser als v_{n_2}, und auch bei allen weiter folgenden Summen kann der Ueberschuss über S die grösste der auf v_{n_2} folgenden Zahlen $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \ldots$ nicht übertreffen. Entsprechendes gilt, wenn man bei der Neuanordnung bis zu einer Summe des Endgliedes v_{n_k} gelangt ist.

Auf der anderen Seite schliesst man den Ueberschuss von S über die in Rede stehenden Summen entsprechend vermöge der Zahlen w_m ein.

Aus der Convergenz von $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ folgt nun $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ (vergl. Lehrsatz I, S. 61), und also ist auch $\lim_{n=\infty} v_n = 0$, $\lim_{m=\infty} w_m = 0$.

Die fraglichen Summen nähern sich somit bei wachsender Gliederanzahl dem Betrage S, w. z. b. w. [1]).

Als Beispiel einer bedingt convergenten Reihe diene:

$$(6) \quad . \; . \; . \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

in dieser Anordnung hat dieselbe den Summenwerth $\log 2$, wie unten gezeigt wird.

5. Begriff der Potenzreihen.

Erklärung: *Ist $u_n = a_n x^n$, unter a_n einen constanten Coëfficienten und unter x eine Variabele verstanden, so ergiebt sich:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

als Gestalt der unendlichen Reihe. Eine solche Reihe bezeichnet man als eine „Potenzreihe“.

Die Reihe (1) ist unbedingt convergent, falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge convergent ist:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad |a_0| + |a_1 \, . \, x| + |a_2 \, . \, x^2| + \cdots$$

Man nehme erstlich an, es gäbe eine *grösste positive* und *endliche* Zahl $x = g$, so dass $|a_n| \, . \, g^n$ für *lim.* $n = \infty$ *nicht* über alle Grenzen wächst. Dann kann man eine endliche Zahl h angeben, so dass die Ungleichung:

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad |a_n| g^n < h$$

für alle n gilt.

Nun wähle man x so, dass $|x| < g$ und also $\frac{|x|}{g} = r < 1$ ist.

Schreibt man alsdann die Reihe (2) in der Gestalt:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \quad |a_0| + |a_1| g \, . \, r + |a_2| g^2 \, . \, r^2 + \cdots,$$

so ist jedes Glied u_k derselben kleiner als das entsprechende Glied v_k der (wegen $r < 1$) convergenten Reihe:

$$h + hr + hr^2 + hr^3 + \cdots$$

Nach dem Princip von S. 63 ist somit die Reihe (4) convergent.

Lehrsatz: *Ist x in dem Intervall $-g < x < +g$ enthalten, so convergirt die Reihe (1) unbedingt; jenes Intervall heisst dieserhalb das Convergenzintervall der Potenzreihe (1).*

Zusatz: *Lässt sich für „jedes“ positive endliche g eine gleichfalls endliche Zahl h finden, so dass die Ungleichung (3) für alle Indices n besteht, so ist die Reihe im Intervall $-\infty < x < +\infty$, d. i. für jeden Werth von x convergent.*

---

[1]) Uebrigens wird man bei $S < 0$ die Bildung der Summen mit $-w_0$, $-w_1, \ldots$ beginnen, während es bei $S = 0$ freisteht, ob man mit v_0 oder $-w_0$ beginnen will.

Ob die Potenzreihe auf einer der „*Convergenzgrenzen*“ $x = g$ oder $x = -g$ noch convergent ist, muss in jedem Falle einzeln entschieden werden.

Vermöge weiterer (hier nicht anzugebender) Betrachtungen gewinnt man den

Lehrsatz: *Eine Potenzreihe stellt in ihrem Convergenzintervall eine „stetige“ Function von x vor; und sie bleibt auch noch bis $x = g$ (oder $x = -g$) „inclusive“ stetig, falls für $x = g$ (resp. $x = -g$) überhaupt noch Convergenz stattfindet.*

6. Vorentwickelungen zu den Sätzen von Taylor und Mac-Laurin.

Erklärung: *Das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ der ganzen positiven Zahlen von 1 bis n bezeichnet man mit $n!$ und liest dies Zeichen „n-Facultät“.*

Die Function $f(x)$ sei sammt ihren n ersten Ableitungen im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$, die Grenzen eingeschlossen, eindeutig und stetig.

Dasselbe gilt somit von der Function:

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} F(x) = f(b) - f(x) - f'(x) \cdot \frac{b-x}{1!} - f''(x) \cdot \frac{(b-x)^2}{2!} - \cdots \\ - f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}\right.$$

Differentiirt man $F(x)$, so heben sich alle Glieder bis auf eins fort:

$$(2) \quad \frac{dF(x)}{dx} = -f^{(n)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Da hiernach $F'(x)$ im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ eindeutig und stetig ist, so findet man nach S. 54:

$$(3) \quad -\int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx = F(b) - F(a) = -F(a);$$

denn aus (1) folgt $F(b) = 0$.

Drückt man $F(a)$ vermöge (1) aus, so folgt der

Lehrsatz: *Ist $f(x)$ sammt seinen n ersten Ableitungen im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ (inclusive a und b) eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:*

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} f(b) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{b-a}{1!} + f''(a) \cdot \frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots \\ + f^{(n-1)}(a) \cdot \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Das letzte, vermöge des bestimmten Integrales ausgedrückte Glied der rechtsseitigen Entwickelung soll das „*Restglied*“ derselben heissen und durch R_n bezeichnet werden:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R_n = \int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx.$$

Zur Umgestaltung von R_n soll der Mittelwerthsatz (5), S. 56, Anwendung finden. Beim Beweise dieses Satzes wurde angenommen, dass $a < b$ sei; doch gilt er auch für $a > b$, da die Formel (5), S. 56, richtig bleibt, falls man sowohl rechts als links die untere mit der oberen Integralgrenze tauscht. Es wurde ferner angenommen, dass $\psi(x)$ im Intervall nirgends negativ sei; doch gilt Formel (5), S. 56, auch noch, falls $\psi(x)$ im Intervall nirgends positiv ist, da die Formel bestehen bleibt, wenn man beiderseits $-\psi(x)$ statt $\psi(x)$ schreibt.

Den im Intervall gelegenen Werth $x = c$ kann man so schreiben:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad c = a + \vartheta\,(b-a), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1;$$

denn es wird, mag nun $a < b$ oder $a > b$ sein, der Werth c das Intervall gerade vollständig beschreiben, falls ϑ stetig von 0 bis 1 wächst.

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind erfüllt, wenn man:

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x), \qquad \psi(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

setzt. Dies liefert für R_n die Gestalt:

$$\text{(I)} \qquad R_n = f^{(n)}[a + \vartheta\,(b-a)] \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind auch für:

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \psi(x) = 1.$$

erfüllt. Diese Auswahl liefert für R_n die Gestalt:

$$\text{(II)} \quad R_n = f^{(n)}[a + \vartheta'\,(b-a)] \cdot \frac{(1-\vartheta')^{n-1}\,(b-a)^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Jedes Mal bedeutet ϑ einen *bestimmten* im Intervall von 0 bis 1 gelegenen Werth, der indessen allgemein nicht näher angebbar ist.

7. Der Taylor'sche Lehrsatz.

Trägt man $a = x$ und $b - a = h$ in (4) Nr. 6 ein, so ergiebt sich der

Taylor'sche Lehrsatz: *Ist die Function $f(x)$ sammt ihren n ersten Ableitungen im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:*

$$(1) \quad \cdots \quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + \cdots \\ + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n, \end{cases}$$

deren rechte Seite man als die „Taylor'sche Reihe" für $f(x)$ bezeichnet. Das „Restglied" R_n kann man noch (I) Nr. 6 in die von Lagrange angegebene Gestalt setzen:

$$(2) \qquad R_n = f^{(n)}(x + \vartheta h)\cdot\frac{h^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

oder nach (II) Nr. 6 in die von Cauchy herrührende Gestalt:

$$(3) \qquad R_n = f^n(x + \vartheta' h)\cdot\frac{(1-\vartheta')^{n-1}\,.\,h^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Für $h = \varDelta x$ und $n = 1$ kommt bei Benutzung der Lagrange'schen Gestalt des Restgliedes die oben bereits benutze Formel (2), S. 30.

Ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig, so bilde man die unendliche Reihe:

$$f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

setze die Summe der n ersten Glieder gleich S_n und mache $S = f(x + h)$.

Formel (1) liefert alsdann $S - S_n = R_n$.

Lehrsatz: *Ist die Function $f(x)$ mit ihren sämmtlichen Ableitungen im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig, und ist für die vorliegenden Werthe x und h die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ erfüllt, so ist die auf der rechten Seite von*

$$(4) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

stehende unendliche Taylor'sche Reihe convergent und hat den links stehenden Summenwerth $f(x + h)$.

8. Der Mac-Laurin'sche Lehrsatz.

Setzt man $a = 0$, $b = x$ in (4), S. 67, ein, so folgt der

Mac-Laurin'sche Lehrsatz: *Ist $f(x)$ sammt seinen n ersten Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig, so gilt:*

$$(1) \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1!} + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

wo die rechts stehende Reihe als „Mac-Laurin'sche Reihe" von $f(x)$

bezeichnet wird. Das „Restglied“ kann man nach (I), S. 68 *in die* **Lagrange'**_sche Gestalt setzen:_

$$(2) \quad \ldots \quad R_n = f^{(n)}(\vartheta x) \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

sowie auch nach (II), S. 68 *in die Cauchy'sche Gestalt:*

$$(3) \quad . \; . \quad R_n = f^{(n)}(\vartheta' x) \cdot \frac{(1-\vartheta')^{n-1} x^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Für die Fortsetzung der Mac-Laurin'schen Reihe bis ins Unendliche gelten dieselben Ueberlegungen wie in Nr. 7.

Lehrsatz: *Ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall zwischen 0 und x (die Grenzen stets eingeschlossen) eindeutig und stetig, und ist für den fraglichen Werth x die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ erfüllt, so ist die rechter Hand in:*

$$(4) \quad f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1!} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

stehende unendliche Mac-Laurin'sche Reihe convergent und hat $f(x)$ zum Summenwerth.

9. Reihenentwickelung der Exponentialfunction.

Ist x ein beliebiger positiver oder negativer endlicher Werth, so ist $f(x) = e^x$ mit allen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig; denn es ist $f^{(n)}(x) = e^x$.

Das Restglied R_{m+n} nach (2), Nr. 8 gebildet, wird für e^x:

$$(1) \quad R_{m+n} = \frac{e^{\vartheta x} x^{m+n}}{(m+n)!} = \left(\frac{e^{\vartheta x} . x^m}{m!}\right) \cdot \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{m+n} \, .$$

Wählt man $m > |x|$, so sind die letzten n Brüche in (1) alle absolut < 1 und haben für $\lim. n = \infty$ die Grenze 0. Da der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (1) endlich ist, so ist $\lim_{n=\infty} R_{m+n} = 0$.

Lehrsatz: *Die Exponentialgrösse e^x lässt sich in die für alle endlichen Werthe von x convergente Potenzreihe entwickeln:*

$$(2) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

wie aus (4), Nr. 8 folgt.

Für $x = 0$ entspringt als *unendliche Reihe für die Zahl e:*

$$(3) \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

Da $a^x = e^{x . \log a}$ ist, so folgt aus (2) als *Potenzreihe für a^x:*

$$(4) \quad a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \cdots$$

10. Reihenentwickelung der Functionen *sin x* und *cos x*.

Ist x ein beliebiger endlicher Werth, so sind die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ mit sämmtlichen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig.

Für $f(x) = \sin x$ folgt aus (2), Nr. 8:

$$R_{2m+2n} = \pm \sin(\vartheta x) \cdot \frac{x^{2m+2n}}{(2m+2n)!}$$
$$= \pm \left[\frac{\sin(\vartheta x) \, . \, x^{2m}}{(2m)!}\right] \cdot \frac{x}{2m+1} \cdot \frac{x}{2m+2} \cdots \frac{x}{2m+2n}.$$

Wählt man $2m > |x|$, so findet man auf demselben Wege, wie in Nr. 9, $\lim\limits_{n=\infty} R_{2m+2n} = 0$. Gerade so findet man $\lim\limits_{n=\infty} R_{2m+2n+1} = 0$ und führt eine entsprechende Betrachtung für $f(x) = \cos x$ durch.

Formel (4), Nr. 8 liefert daraufhin den

Lehrsatz: *Die Functionen sin x und cos x lassen sich in die für alle endlichen Werthe x convergenten Potenzreihen entwickeln:*

$$(1) \quad \ldots \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

$$(2) \quad \ldots \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots.$$

Diese Formeln und ebenso die Formel (2), Nr. 9 liefern wichtige Hülfsmittel zur Berechnung der Werthe der Functionen $\sin x$, $\cos x$, e^x bei gegebenem x.

11. Reihenentwickelung der Function *log*(1 + *x*).

Für die Function $f(x) = \log(1+x)$ ergiebt sich:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \; f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \; \cdots,$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Wählt man demnach $x > -1$, übrigens aber als beliebige endliche Zahl, so ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig.

Für das Restglied R_n der Mac-Laurin'schen Reihe findet man, je nachdem die Formel (2) oder (3), Nr. 8 in Anwendung gebracht wird, die erste oder zweite der folgenden Gestalten:

$$(2) \quad \ldots \quad R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n,$$

$$(3) \quad \ldots \quad R_n = \left(\frac{-x+\vartheta' x}{1+\vartheta' x}\right)^{n-1} \cdot \frac{x}{1+\vartheta' x}.$$

Ist $0 < x < 1$, so ist natürlich auch $0 < x < 1 + \vartheta x$, sowie $0 < \frac{x}{1+\vartheta x} < 1$; und also folgt aus (2) offenbar $\lim_{n=\infty} R_n = 0$.

Ist hingegen $-1 < x < 0$, so ist $0 < -x < 1$, und also:

$$0 \leqq -x(1-\vartheta') = -x + \vartheta' x < 1 + \vartheta' x,$$

$$0 \leqq \frac{-x + \vartheta' x}{1 + \vartheta' x} < 1.$$

Jetzt ergiebt sich sonach $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ aus Formel (3).

Der Ansatz (4), Nr. 8 liefert daraufhin folgenden

Lehrsatz: *Die Function $\log(1+x)$ lässt sich in dem Intervall $-1 < x < +1$ in die convergente Potenzreihe entwickeln:*

$$(4) \quad \ldots \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Dass die auf der rechten Seite in (4) stehende Reihe für $|x| > 1$ *nicht* convergent ist, folgt auf Grund des zweiten Lehrsatzes in Nr. 3, S. 63, aus der für die Reihe (4) geltenden Gleichung:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -x \cdot \frac{n}{n+1};$$

denn dieser Quotient nähert sich für $\lim n = \infty$ der Grenze $-x$ und ist somit von einem bestimmten n an absolut > 1.

Zusatz: *Für die Convergenzgrenze $x = -1$ ist die Reihe (4) divergent (vergl. S. 61); für $x = +1$ ist sie convergent und liefert nach dem letzten Lehrsatze in Nr. 5:*

$$(5) \quad \ldots \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Die Convergenz ergiebt sich aus den beiden Schreibarten:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots,$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots$$

der Reihe (5). Die erste zeigt nämlich, dass die Reihe entweder convergent ist oder dass $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$ ist (Lehrsatz III, S. 62); die zweite zeigt, dass $S_n < 1$ bleibt. —

Liegt x zwischen -1 und $+1$, so gilt dasselbe von $-x$, und also ist:

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraction dieser Formel von obiger Formel (4) folgt:

$$(6) \qquad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right).$$

Versteht man unter N eine positive ganze Zahl, und setzt $x = \frac{1}{N}$ in (4) und $x = \frac{1}{2N+1}$ in (6) ein, so folgen die Formeln:

$$(7) \qquad log(N+1) = log N + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \cdots,$$

$$(8) \qquad log(N+1) = log N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right).$$

Diese Formeln sind geeignet zur Berechnung des natürlichen Logarithmus der ganzen Zahl $(N+1)$ aus dem von N.

Wegen des Ueberganges zu den Logarithmen einer anderen Basis sehe man S. 19.

12. Die Binomialreihe.

Ist m ein positiver oder negativer rationaler Bruch (die ganzen Zahlen m einbegriffen), und ist $x > -1$, so giebt es einen und nur einen zugehörigen Werth $f(x) = (1+x)^m$, der reell und zugleich positiv ist. Auch alle Ableitungen der hiermit definirten Function sind mit $f(x)$ selbst für jedes endliche $x > -1$ eindeutig und stetig.

Die n^{te} Ableitung ist

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

so dass

$$(1) \qquad \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \binom{m}{n}$$

wird, wo rechts die in (2), S. 28, bei Gelegenheit des „n^{ten} *Binomialcoëfficienten der* m^{ten} *Potenz*“ erklärte Abkürzung gebraucht ist.

Zur Untersuchung des Restgliedes knüpfen wir an den Integralansatz (5), S. 68, und nehmen sogleich $a = 0$:

$$(2) \quad \ldots R_n = n\binom{m}{n}\int_0^b (1+x)^{m-n}(b-x)^{n-1}\,dx.$$

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind erfüllt, wenn wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = (1+x)^{m+1}, \quad \psi(x) = \dfrac{(b-x)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{-1}{n(1+b)} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{b-x}{1+x}\right)^n \end{cases}$$

setzen (vergl. S. 56 und S. 68).

Nun ist, wie bereits in (3) angedeutet wurde:

$$\int \psi(x)\,dx = -\frac{1}{n(1+b)} \cdot \left(\frac{b-x}{1+x}\right)^n, \quad \int_0^b \psi(x)\,dx = \frac{b^n}{n(1+b)}.$$

Daraufhin ergiebt der Mittelwerthsatz (5), S. 56:

$$(4) \quad \ldots \quad R_n = \binom{m}{n} (1 + \vartheta b)^{m+1} \cdot \frac{b^n}{1+b}.$$

Setzt man $b = x$ (vergl. Nr. 8), so folgt als Restglied der Mac-Laurin'schen Reihe für $(1 + x)^m$:

$$(5) \quad \begin{cases} R_n = \binom{m}{n} \dfrac{x^n (1 + \vartheta x)^{m+1}}{1 + x} = \dfrac{(1 + \vartheta x)^{m+1}}{1 + x} \\ \qquad \cdot \left[\dfrac{m x}{1} \cdot \dfrac{(m-1) x}{2} \cdots \dfrac{(m-n+1) x}{n}\right]. \end{cases}$$

Lässt man n grösser und grösser werden, so treten in der Klammer auf der rechten Seite von (5) mehr und mehr Factoren hinzu, die sich für $lim.\ n = \infty$ der Grenze $-x$ nähern. Es wird somit $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ oder $= \infty$, je nachdem $|x| < 1$ oder > 1 ist.

Lehrsatz: *Ist m irgend ein rationaler Bruch und liegt x im Intervall $-1 < x < +1$, so gestattet die oben erklärte Function $(1 + x)^m$ die convergente Entwickelung:*

$$(6) \quad (1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \cdots;$$

diese Reihe wird die Binomialreihe genannt.

Ist m eine ganze positive Zahl, so verschwinden die Coëfficienten von $x^{m+1}, x^{m+2} \ldots$, und es stellt sich der binomische Lehrsatz in der S. 28 besprochenen Gestalt wieder ein.

13. Methode der unbestimmten Coëfficienten.

Eine vorgelegte Function $f(x)$ möge in die Potenzreihe:

$$(1) \quad \ldots \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

entwickelbar sein, welche innerhalb eines gewissen Intervalles convergent ist.

Wie man durch eingehendere Betrachtungen zeigen kann, gilt alsdann für $f'(x)$ die durch gliedweises Differentiiren der rechten Seite von (1) entspringende Potenzreihe:

$$(2) \quad \ldots \quad f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \cdots,$$

welche in demselben Intervall, wie die Reihe (1), convergent ist.

Hieraus kann man weiter schliessen, dass die Reihe (1) nothwendig die Mac-Laurin'sche Entwickelung von $f(x)$ ist, und dass somit ausser dieser keine andere Potenzreihe für $f(x)$ existirt.

Ist die Berechnung von a_n auf Grund des Ansatzes (4), Nr. 8 schwierig, so ist gelegentlich folgende Operationsweise erfolgreich: *Man setzt die Potenzreihe von $f(x)$ mit unbestimmten Coëfficienten, d. i. in der Form (1), an und sucht die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ daraus zu*

bestimmen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (1) die Eigenschaften der Function $f(x)$ besitzen muss.

Zur Erläuterung dieser „*Methode der unbestimmten Coëfficienten*" diene erstlich die Function $f(x) = arc\ tg\ x$, wobei der „Hauptwerth" dieser Function gemeint ist.

Aus letzterem Umstande folgt $a_0 = 0$; denn der Hauptwerth $arc\ tg\ (0)$ ist $= 0$ (vergl. S. 9).

Weiter benutze man $f'(x) = (1 + x^2)^{-1}$ und ziehe aus Nr. 12:

$$(3) \quad . \quad . \quad f'(x) = (1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

als eine im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Entwickelung.

Durch Vergleich von (2) und (3) folgt ohne Weiteres:

$$a_1 = 1, \quad 2a_2 = 0, \quad 3a_3 = -1, \quad 4a_4 = 0, \quad 5a_5 = 1 \ldots.$$

Lehrsatz: *Der Hauptwerth der Function arc tg x gestattet die im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Reihenentwickelung:*

$$(4) \quad . \quad . \quad arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Auch an der oberen Convergenzgrenze $x = 1$ bleibt die Convergenz bestehen [1]; und da der Hauptwerth $arc\ tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, so ergiebt sich nach dem Lehrsatz am Ende von Nr. 5, S. 67 für $\frac{\pi}{4}$ die Entwickelung:

$$(5) \quad . \quad . \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Für den Hauptwerth $f(x) = arc\ sin\ x$ ist gleichfalls $a_0 = 0$. Andererseits hat man $f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so dass man aus Nr. 12:

$$(6) \quad . \quad . \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

als eine im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Entwickelung entnimmt.

Der Vergleich von (2) und (6) liefert $a_0, a_1 \ldots$ und damit den

Lehrsatz: *Der Hauptwerth der Function arc sin x gestattet die im Intervall $-1 < x < 1$ convergente Reihenentwickelung:*

$$(7) \quad arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus:

$$(8) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7.2^7} + \cdots$$

---

[1] Siehe die an (5), S. 72 angeschlossene Betrachtung.

VIII. Capitel.

Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \cdots$ sich darstellenden Functionswerthe.

1. Die unbestimmte Gestalt $\frac{0}{0}$.

Ist eine elementare Function in der Gestalt $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gegeben, und werden für den *endlichen* Werth $x = a$ *Zähler und Nenner zugleich mit 0 identisch*, $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, so bietet sich $f(a)$ in der Gestalt $\frac{0}{0}$ dar, mit welcher man keinen bestimmten Sinn oder Zahlwerth verknüpfen kann.

Um gleichwohl von einem Functionswerthe $f(a)$ sprechen zu können, giebt man folgende

Erklärung: *Als „wahren Werth" $f(a)$ der Function $f(x)$ für $x = 0$ bezeichnet man den Grenzwerth:*

$$(1) \quad \ldots \ldots f(a) = \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right).$$

Dabei gilt hier und in den weiter zur Sprache kommenden Fällen die *Annahme, dass überhaupt eine solche Grenze existirt.*

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in der „Umgebung" von $x = a$ stetig und gilt dasselbe von $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$, so dient folgende Ueberlegung zur Bestimmung von $f(a)$:

Man wähle den Werth $x = b$ in der Umgebung von a so, dass $\varphi(b)$ und $\psi(b)$ von 0 verschieden sind, und setze darauf hin:

$$(2) \quad \ldots \ldots \frac{\varphi(b)}{\psi(b)} = A, \quad F(x) = \varphi(x) - A\,\psi(x).$$

Die Function $F(x)$ ist sammt ihrer Ableitung im Intervall von a bis b stetig, und sie verschwindet sowohl für $x = a$ wie für $x = b$, ohne im ganzen Intervall gleich 0 zu sein [1]).

Es giebt demnach im Intervall wenigstens einen Werth c, für welchen $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum wird; und hieraus folgt bei den geltenden Voraussetzungen:

$$(3) \quad \ldots \ldots F'(c) = \varphi'(c) - A\,\psi'(c) = 0.$$

Den hieraus entspringenden Werth A setze man in die erste

[1]) Dieser Fall würde trivial sein und $f(a) = A$ liefern.

Gleichung (2) ein, schreibe $c = a + \vartheta\,(b - a)$ und ersetze b durch x; dann ergiebt sich:

$$(4)\quad \ldots \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},\quad x_1 = a + \vartheta\,(x - a).$$

Für *lim.* $x = a$ wird auch *lim.* $x_1 = a$; und also folgt der

Lehrsatz: *Nähern sich die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für lim. $x = a$ zugleich der Grenze 0, so gilt die Gleichung:*

$$(5)\quad \ldots\ldots \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right).$$

Sollten auch $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ zugleich zu 0 werden, falls $x = a$ wird, so werden wir unter der Voraussetzung, dass $\varphi''(x)$ und $\psi''(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig sind, durch erneute Anwendung der Gleichung (5):

$$(6)\quad \ldots\ldots \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}\right).$$

finden und nöthigenfalls die gleiche Schlussweise noch öfter wiederholen.

Lehrsatz: *Werden Zähler und Nenner, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von $f(x)$ sammt ihren $(n - 1)$ ersten Ableitungen zugleich zu 0, falls $x = a$ wird, während $\varphi^{(n)}(a)$ und $\psi^{(n)}(a)$ wenigstens nicht beide gleich 0 sind, so gilt die Gleichung:*

$$(7)\quad \ldots\ldots f(a) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

Dasselbe Ergebniss liefert die Anwendung des Taylor'schen Satzes (1) und (2), S. 69, aus welchem man unter den hier gültigen Voraussetzungen folgert:

$$(8)\quad \varphi(a + h) = \varphi^{(n)}(a + \vartheta h)\,\frac{h^n}{n!},\quad \psi(a + h) = \psi^{(n)}(a + \vartheta' h)\cdot\frac{h^n}{n!};$$

dabei ist natürlich ϑ' im Allgemeinen von ϑ verschieden.

Bildet man den Quotienten der Gleichungen (8), so liefert die Grenze *lim.* $h = 0$ die Regel (7) wieder.

Beispiele sind:

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{\cos x}{1}\right) = 1,$$

$$\lim_{x=0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}\right) = 2,$$

deren erstes die Formel (1), S. 20 bestätigt.

2. Die unbestimmte Gestalt $\frac{\infty}{\infty}$.

Erklärung: *Hat die Function $f(x)$ dieselbe Gestalt wie in Nr. 1, und werden Zähler und Nenner von $f(x)$ für $x = a$ beide unendlich gross, $\varphi(a) = \infty$, $\psi(a) = \infty$, so versteht man unter dem*

„wahren Werthe“ $f(a)$ der Function $f(x)$ für das Argument $x = a$ die Grenze $f(a) = \lim_{x=a} f(x)$, sofern eine solche existirt.

Das Unendlichwerden der „elementaren“ Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist ein solches, dass die Functionen:

$$(1) \quad \ldots \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)}$$

für $x = a$ zugleich verschwinden, übrigens aber in der Umgebung von $x = a$ stetig sind (vergl. S. 14, oben).

Sind in der Umgebung von $x = a$ auch die Ableitungen $\varphi_1'(x)$ und $\psi_1'(x)$ stetig, so liefert Nr. 1 für $\lim_{x=a} f(x)$:

$$(2) \quad \lim_{x=a} \left(\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\right) = \lim_{x=a} \left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi_1'(x)}\right) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2 \cdot \lim_{x=a} \left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right),$$

$$(3) \quad \ldots \quad \lim_{x=a} f(x) = \left[\lim_{x=a} f(x)\right]^2 \cdot \lim_{x=a} \left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right).$$

Ist $\lim_{x=a} f(x)$ von 0 verschieden und endlich, so folgt aus (3):

$$(4) \quad \ldots \quad \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right).$$

Ist $\lim_{x=a} f(x) = 0$, so darf man Formel (4) auf die Function

$$(5) \quad \ldots \quad g(x) = 1 + f(x) = \frac{\psi(x) + \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$$

anwenden und findet auf diese Weise:

$$(6) \quad \ldots \quad 1 + \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \frac{\chi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

so dass die Formel (4) bestehen bleibt.

Auch für $\lim_{x=a} f(x) = \infty$ ist Formel (4) richtig, wie man durch Vermittelung der Function $g(x) = 1 : f(x)$, für welche Formel (4) bewiesen ist, zeigt.

Auf dieselbe Art, wie in Nr. 1, ergiebt sich nunmehr der

Lehrsatz: *Werden Zähler und Nenner, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von $f(x)$ sammt ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen zugleich unendlich gross, falls $x = a$ wird, während $\varphi^{(n)}(a)$ und $\psi^{(n)}(a)$ wenigstens nicht beide ∞ sind, so gilt die Gleichung:*

$$(7) \quad \ldots \quad f(a) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}. \text{ — }$$

Nähert sich x der Grenze $+\infty$, so nähert sich $y = x^{-1}$ als positive Grösse der Grenze 0.

Werden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $\lim. x = +\infty$ gleichzeitig ∞, so setze man:

(8) $$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi_1(y), \ \psi(x) = \psi\left(\frac{1}{y}\right) = \psi_1(y)$$

und untersuche $\varphi_1(y) : \psi_1(y)$ für $y = 0$.

Die bisherige Entwickelung liefert daraufhin für $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$:

(9) . . $$\lim_{y=0}\left(\frac{\varphi_1(y)}{\psi_1(y)}\right) = \lim_{y=0}\left(\frac{\varphi_1'(y)}{\psi_1'(y)}\right) = \lim_{x=+\infty}\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right),$$

wie man durch Division der beiden Gleichungen zeigt:

(10) . . $$\varphi_1'(y) = -x^2\varphi'(x), \quad \psi_1'(y) = -x^2\psi'(x).$$

Der letzte Ausdruck (9) für $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$ ergiebt den

Lehrsatz: *Wachsen für* $\lim. x = \infty$ *Zähler und Nenner von* $f(x)$ *gleichzeitig über alle Grenzen, so bleibt für die Bestimmung des „wahren Werthes"* $f(\infty) = \lim\limits_{x=+\infty} f(x)$ *die für ein endliches a gewonnene Regel* (7) *erhalten.*

Beispiel I. Es soll der wahre Werth der Function $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ mit ganzzahligem positiven n für $x = \infty$ berechnet werden. Hier ist n Male im Zähler und Nenner zu differentiiren, wodurch man findet:

(11) . . . . . $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{e^x}{n!}\right) = \infty.$$

Man spricht das Ergebniss aus durch folgenden

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden der Exponentialfunction* e^x *für* $x = \infty$ *ist stärker als dasjenige irgend einer Potenz* x^n *mit endlichem positiven Exponenten* n.

Beispiel II. Es soll der wahre Werth von $f(x) = \frac{\log x}{x^r}$ mit irgend einem ganzen oder gebrochenen $r > 0$ für $x = \infty$ berechnet werden. Einmalige Differentiation liefert:

(12) $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{\log x}{x^r}\right) = \lim_{x=\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{r\,x^{r-1}}\right] = \lim_{x=\infty}\left(\frac{1}{r\,x^r}\right) = 0.$$

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden des Logarithmus* $\log x$ *für* $x = \infty$ *ist schwächer als dasjenige einer Potenz* x^r *mit irgend einem von 0 verschiedenen positiven Exponenten* r.

Man vergleiche mit diesen Ergebnissen den Verlauf der Curven für Exponentialfunction und Logarithmus (Fig. 6, S. 5 und Fig. 7, S. 6).

3. Die unbestimmten Gestalten $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Nimmt die Function $f(x)$ für $x = a$ eine der noch übrigen fünf unbestimmten Gestalten $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so definirt man den *„wahren Werth"* $f(a)$ der Function $f(x)$ für $x = a$ stets wieder durch $f(a) = \lim\limits_{x=a} f(x)$.

Die Berechnung von $f(a)$ gelingt in allen fünf Fällen durch Zurückführung auf eine der in Nr. 1 und 2 behandelten Gestalten.

I. Ist $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, und wird der erste Factor für *lim.* $x = a$ gleich 0, der zweite $= \infty$, so setze man entweder

$$(1) \quad \ldots \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)} \text{ oder } \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Hieraus entspringt für $f(x)$ entweder die Gestalt:

$$(2) \quad \ldots \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Für $x = a$ tritt dann entsprechend entweder $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ein.

Beispiel. Um den wahren Werth von $f(x) = x^r . \log x$ mit $r > 0$ für $x = 0$ zu bestimmen, wähle man die zweite Formel (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x=0} (x^r . \log x) = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{\log x}{x^{-r}}\right) = \lim\limits_{x=0} \left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-r\, x^{-r-1}}\right] \\ \qquad = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{x^r}{-r}\right) = 0. \end{cases}$$

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden von $\log x$ für $x = 0$ ist so schwach, dass das Product von $\log x$ mit der Potenz x^r irgend eines von 0 verschiedenen positiven Exponenten r für lim. $x = 0$ die Grenze 0 hat.*

II. Ist $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, und werden Minuend und Subtrahend für $x = a$ gleichzeitig unendlich, so benutze man die in (1) erklärten Functionen $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ und schreibe daraufhin:

$$(4) \quad \ldots \quad f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{\psi_1(x)} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\, \psi_1(x)}.$$

In dieser Form erscheint $f(x)$ für $x = a$ in der Gestalt $\frac{0}{0}$.

III. Nimmt die Function $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ für $x = a$ eine der Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setze man

$$(5) \quad \log \varphi(x) = \varphi_1(x), \quad \log f(x) = F(x), \quad f(x) = e^{F(x)}.$$

Die so definirte Function:

$$(6) \quad \ldots \quad F(x) = \log f(x) = \psi(x) \cdot \varphi_1(x)$$

erscheint in allen drei Fällen für $x = a$ in der Gestalt $0 . \infty$, so dass man $F(a)$ und daraufhin $f(a) = e^{F(a)}$ nach der in I. angegebenen Regel finden kann.

Beispiel. Die Function $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ nimmt für $x = 0$ die Gestalt 1^∞ an. Hier ist:

$$(7) \quad \lim\limits_{x=0} F(x) = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{\log(1 + x)}{x}\right) = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{1 + x}\right) = 1;$$

und also ergiebt sich $f(0) = e^{F(0)} = e^1 = e$ in Uebereinstimmung mit (8), S. 13.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

ZWEITER THEIL.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ZWEITER THEIL.

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

VORWORT.

Das vorliegende zweite Heft des „Leitfadens zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung“ giebt den Stoff wieder, welcher an hiesiger Hochschule im zweiten Studiensemester zur Behandlung kommt. Einige Gegenstände aus dem letzten Kapitel sind zwar mehrfach erst in der Vorlesung des dritten Semesters zum Vortrag gekommen, welche dann in der Hauptsache der Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen gewidmet bleibt.

In Anordnung und Art der Darstellung schliesst sich das zweite Heft durchaus an das zu Beginn des Jahres erschienene erste Heft an.

Die beifällige Aufnahme dieses ersten Heftes seitens der Herren Fachgenossen ist mir durch zahlreiche Zuschriften bezeugt. Diese letzteren sind sämmtlich für mich sehr ehrend und interessant gewesen, und ich wollte bei dieser Gelegenheit meinem lebhaftesten Danke Ausdruck geben.

Braunschweig, im März 1897.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

X. Capitel.

Hülfssätze aus der Algebra.

XI. Capitel.

Weiterführung der Integralrechnung.

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

---

1. Einführung der complexen Zahlen.

Die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ kann weder durch eine positive, noch durch eine negative Zahl x, noch auch durch $x = 0$ gelöst werden.

Sagt man demnach [unter Beibehaltung des auf die in I, 1 [1]) eingeführten Zahlen bezogenen Operationszeichens der Quadratwurzelziehung], $x = \sqrt{-1}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$, so ist in $\sqrt{-1}$ ein gegenüber I, 1 neuer Zahlbegriff geschaffen. Diese neue Zahl $\sqrt{-1}$, welche auch abgekürzt mit i bezeichnet wird, hat zunächst *nur* die Eigenschaft, *mit sich selbst multiplicirbar zu sein und dabei das Product* -1 *zu geben.*

Um die Zahl i ausgedehnter in Benutzung zu nehmen, giebt man die

Erklärung: *Die Zahl i soll den bisherigen ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen hinzugesellt werden, und in dem solchergestalt erweiterten Zahlensysteme sollen alle die vier Grundrechnungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division betreffenden Regeln unverändert bestehen bleiben.*

Bei Ausführung der Operationen der Addition u. s. w. auf die Zahlen des vorliegenden Systems tritt eine neue Erweiterung dieses Systems ein: aus zwei Zahlen a, b der bisherigen Art und der Zahl i erzeugt man durch Multiplication und Addition die Zahl $(a + i \cdot b)$ oder kurz $(a + ib)$.

Erklärung: *Die so zu gewinnenden Zahlen $(a + ib)$ heissen „complexe Zahlen". Ist von den Zahlen a, b die letzte, b, allein $\gtrless 0$, so spricht man von einer „rein imaginären" Zahl; und man nennt i oder*

---

[1]) Diese Abkürzung bedeutet: „I. Capitel, Nr. 1".

$+i$ die „positive", $-1 \cdot i$ oder $-i$ die „negative imaginäre Einheit". Ist $b = 0$, liegt also eine Zahl der bisher allein betrachteten Art vor, so spricht man von einer „reellen Zahl". Im Anschluss hieran heisst a der „reelle", ib der „imaginäre Bestandtheil" der complexen Zahl $(a + ib)$.

Erklärung: *Die beiden complexen Zahlen $(a + ib)$ und $(a - ib)$, welche sich nur im Vorzeichen des imaginären Bestandtheils unterscheiden, heissen „einander conjugirt complex" oder kurz „conjugirt".*

Will man a und b nicht constant, sondern *variabel* denken, so schreibe man x statt a und y statt b, wobei dann x und y veränderliche Grössen im Sinne von I, 1 sind.

Es entspringt der *Begriff der „complexen variabelen Grösse"* oder kurz der *„complexen Variabelen"* $(x + iy)$.

Zur Abkürzung werden wir späterhin die complexe Variabele $(x + iy)$ durch z bezeichnen.

2. Rechnungsregeln für complexe Zahlen.

Für die Addition resp. Subtraction zweier complexen Zahlen $(a + ib)$ und $(c + id)$ findet man:

(1) . . $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$,

und auf dieselbe Weise ergiebt sich die Formel:

(2) . . $(a - ib) \pm (c - id) = (a \pm c) - i\,(b \pm d)$.

Bei der Multiplication beachte man, dass $i^2 = -1$ ist; es ergeben sich die Formeln:

(3) . . $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$,

(4) . . $(a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i\,(ad + bc)$.

Soll $(a + ib)$ durch $(c + id)$ getheilt werden, so darf $(c + id)$ nicht mit der Zahl 0 identisch sein. Dies vorausgesetzt, findet man:

$$(5)\qquad \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2};$$

und daneben reiht sich die Formel:

$$(6)\quad . . . \quad \frac{a - ib}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Aus diesen Rechnungen ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Addition, Subtraction, Multiplication und Division zweier complexen Zahlen ergiebt jeweils als Resultat wieder eine complexe Zahl.*

Ersetzt man die beiden gegebenen Zahlen zugleich durch ihre conjugirten, so geht auch die als Resultat entspringende Zahl in ihre conjugirte Zahl über.

Beide Regeln werden erhalten bleiben, wenn wir Addition, Subtraction u. s. w. wiederholt ausüben. Man gelangt so zum allgemeinen

Begriff der „*rationalen Rechnungsarten*“, welche die Potenzirung (als wiederholte Multiplication) einschliessen.

Lehrsatz: *Wendet man auf gegebene complexe Zahlen irgend welche rationale Rechnungen an, so ist das Ergebniss stets wieder eine complexe Zahl.*

Eine Gleichung, in welcher irgend welche complexe Zahlen rational verbunden erscheinen, bleibt richtig, falls man alle vorkommenden Zahlen zugleich durch ihre conjugirten ersetzt.

Als Specialfall der Formel (3) merke man an:

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Lehrsatz: *Das Product zweier conjugirten Zahlen ist reell und positiv.*

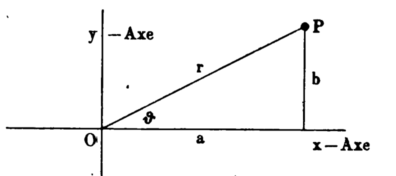
Die Ergebnisse der vorliegenden Nummer bestätigen die Brauchbarkeit der ersten in Nr. 1 abgegebenen Erklärung.

3. Geometrische Deutung der complexen Zahlen.

Zur geometrischen Deutung der complexen Zahlen legt man eine Ebene und in ihr ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest.

Erklärung: *Der Punkt P der Ebene mit der Abscisse $x = a$ und der Ordinate $y = b$ soll der Bildpunkt oder das Bild der complexen Zahl $(a + ib)$ sein (cf. Fig. 1). Die Ebene heisse „Ebene der complexen Zahlen“ oder kurz „Zahlenebene“ (cf. I, 1).*

Fig. 1.



Die x-Axe liefert die Bildpunkte der reellen Zahlen und heisst deshalb die „*reelle Axe*“ (Zahlenlinie in I, 1). Die y-Axe besteht (abgesehen vom Nullpunkte) aus den Bildern der rein imaginären Zahlen und heisst deshalb auch „*imaginäre Axe*“.

Den Uebergang zu *Polarcoordinaten* r, ϑ (cf. V, 10) vollziehe man nach Fig. 1. Dann ist $a = r \cos \vartheta$ und $b = r \sin \vartheta$. Als „*Polardarstellung*“ der complexen Zahl $(a + ib)$ ergiebt sich so:

$$(1) \qquad a + ib = r \cos \vartheta + i r \sin \vartheta = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Erklärung: *Der Zahlwerth des Radius vector r des Bildpunktes P von $(a + ib)$ heisst „absoluter Betrag“ der complexen Zahl $(a + ib)$, und letzterer wird analog wie in I, 12 durch $|a + ib|$ bezeichnet:*

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad |a + ib| = r = + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Winkel ϑ ist in Bogenmaass zu messen (cf. I, 7) und heisst „Amplitude" der complexen Zahl $(a + ib)$.

Eine complexe Variabele $z = x + iy$ heisst „*unbeschränkt*" oder „*beschränkt veränderlich*", je nachdem der Bildpunkt P von $(x + iy)$ in der Zahlenebene an jede Stelle gelangen kann oder nicht. Im letzteren Falle bilden die gesammten für P zugänglichen Stellen der Zahlenebene den „*Bereich der complexen Variabelen* $z = x + iy$".

Fig. 2.

Die complexe Grösse z heisst „*stetig variabel*" oder kurz „*stetig*", falls ihr Bildpunkt P in der Zahlenebene Bewegungen „im gewöhnlichen Sinne" ausführt. Eine stetige Variabele z kann demnach nie unendlich gross werden, und der Bereich einer stetigen und beschränkt veränderlichen Grösse z ist stets ein *zusammenhängendes* Stück der Zahlenebene. Als Beispiel diene das in Fig. 2 durch Schraffirung hervorgehobene Stück der Zahlenebene.

4. Geometrische Deutung der Addition und Multiplication complexer Zahlen.

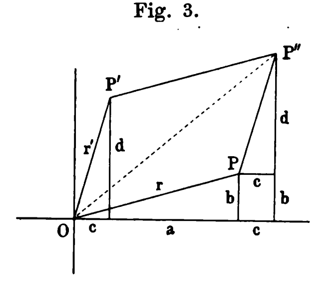
Die Formel für die Addition zweier complexen Zahlen:

$$(1) \quad . \; . \; . \; (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

liefert in der Zahlenebene die durch Fig. 3 dargestellten Verhältnisse.

Lehrsatz: *Der Bildpunkt P'' der Summe zweier complexen Zahlen wird gewonnen, indem man die Radien vectoren $\overline{OP}$ und $\overline{OP'}$ der Summanden zieht und dieselben zum Parallelogramm ergänzt; der vierte (O gegenüberliegende) Eckpunkt dieses Parallelogramms ist P''.*

Fig. 3.



Der Grundsatz der Addition, dass der Summenwerth unabhängig von der Reihenfolge der Summanden ist, wird durch die ausgeführte Construction direct evident.

Die absoluten Beträge der Summanden und der Summe werden in Fig. 3 durch die Längen der Strecken $\overline{OP}$, $\overline{PP''}$ und $\overline{OP''}$ gegeben. Fig. 3 lehrt demnach den

Lehrsatz: *Der absolute Betrag der Summe zweier complexen Zahlen ist niemals grösser als die Summe der absoluten Beträge der Summanden:*

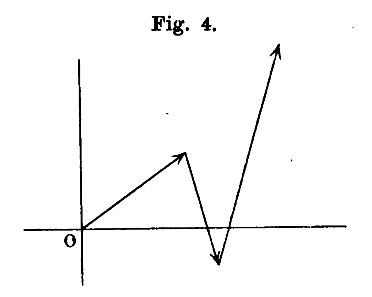
$$(2) \quad . \quad . \quad |(a+c)+i(b+d)| \leqq |a+ib|+|c+id|;$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur dann, wenn die beiden Summanden gleiche Amplitude haben.

Dieser Satz überträgt sich sofort auf Summen einer beliebigen endlichen Anzahl von Summanden. —

Noch einfacher lässt sich die geometrische Deutung der Addition fassen, wenn man die einzelne complexe Zahl in der Zahlenebene durch eine solche *parallel mit sich selbst verschiebbare Strecke* versinnlicht, welche in *Richtung* und *Länge* mit dem von O nach P gerichteten Radius vector der Zahl übereinstimmt.

Fig. 4.



Die Addition wird dann einfach vollzogen, *indem man, vom Nullpunkt O beginnend, die den Summanden entsprechenden Strecken nach der „Regel der Streckenaddition in der Ebene" an einander trägt*, wie dies Fig. 4 im Falle dreier Summanden andeutet. *Der Endpunkt der letzten Strecke ist der Bildpunkt der Summe*; und es gilt der Satz, *dass dieser Punkt unabhängig von der Anordnung der Summanden ist.* —

Für die Multiplication folgert man aus (3), S. 2:

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,.\,\sqrt{c^2+d^2},$$

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad |(a+ib)(c+id)| = |a+ib|\,.\,|c+id|,$$

so dass der absolute Betrag des Productes zweier Factoren gleich dem Product der absoluten Beträge der Factoren ist.

Bildet man demnach unter Heranziehung der Polardarstellung (1), S. 3 den Ansatz:

$$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,.\,r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = r''(\cos\vartheta'' + i\sin\vartheta''),$$

so ist $r'' = r\,.\,r'$, und es restirt die Formel:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,.\,(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta'',$$

$$(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta'',$$

$$(4) \quad . \quad . \quad \cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta''.$$

Nun sind zwei complexe Zahlen $(\alpha + i\beta)$ und $(\gamma + i\delta)$ nur dann einander gleich, wenn $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ ist, da sich sonst aus:

$$\alpha + i\beta = \gamma + i\delta$$

für i der *reelle* Werth $(\alpha - \gamma) : (\delta - \beta)$ berechnen würde, was doch nicht möglich ist.

Aus (4) folgt somit $\cos\vartheta'' = \cos(\vartheta + \vartheta')$, $\sin\vartheta'' = \sin(\vartheta + \vartheta')$; und also ist ϑ'', von einem Multiplum von 2π abgesehen (welches wir jedoch hier vernachlässigen dürfen), gleich $(\vartheta + \vartheta')$.

Durch Zusatz weiterer Factoren entspringt der allgemeine

Lehrsatz: *Der absolute Betrag des Productes einer endlichen Anzahl von Factoren ist gleich dem „Product" der absoluten Beträge dieser Factoren; die Amplitude des Productes ist gleich der „Summe" der Amplituden der einzelnen Factoren.*

Einen analogen Satz für die Division zweier complexen Zahlen wird man leicht aufstellen.

Die Erörterungen der beiden letzten Nummern verleihen sowohl den complexen Zahlen selbst, wie den rationalen Rechnungen mit ihnen eine concrete Bedeutung.

5. Der Moivre'sche Lehrsatz.

Der letzte Lehrsatz in Nr. 4 liefert für die n^{te} Potenz einer complexen Zahl (unter n eine ganze positive Zahl verstanden):

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta).$$

Setzt man $r = 1$, so folgt:

$$(1) \quad \ldots \quad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta.$$

Formel (1) gilt auch für $n = 0$; denn in diesem Falle haben beide Seiten in (1) den Werth 1.

Geht man zu den reciproken Werthen der linken und rechten Seite von (1) über, so ist

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \frac{1}{\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta};$$

und durch Umwandlung der rechten Seite vermöge (5) S. 2 folgt:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \cos n\vartheta - i\sin n\vartheta.$$

Nun ist für irgend einen Winkel η stets $\cos(-\eta) = \cos\eta$ und $\sin(-\eta) = -\sin\eta$. Die letzte Formel liefert also:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \cos(-n)\vartheta + i\sin(-n)\vartheta.$$

Moivre'scher Lehrsatz: *Für jede ganze positive oder negative Zahl n, sowie für $n = 0$ gilt die Gleichung:*

$$(2) \quad \ldots \quad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta.$$

6. Radicirung complexer Zahlen, Einheitswurzeln.

Als n^{te} Wurzel aus der gegebenen complexen Zahl $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ist jede complexe Zahl $r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$ zu bezeichnen, für welche die Gleichung gilt:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad r'^n(\cos n\vartheta' + i \sin n\vartheta') = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta).$$

Es ist somit r' die *eindeutig* bestimmte reelle positive Zahl $\sqrt[n]{r}$, während für ϑ' die Gleichung:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n\vartheta' = \vartheta + 2\nu\pi, \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\nu\pi}{n}$$

mit einer *beliebig zu wählenden ganzen Zahl* ν bestehen muss.

Zwei solche Winkel ϑ', die um ein Multiplum von 2π von einander verschieden sind, liefern ein und dieselbe Zahl $r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$. Man erhält also bereits alle n^{ten} Wurzeln aus $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, falls man für ν nur die n Zahlen $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ einsetzt.

Lehrsatz: *Es giebt stets genau n verschiedene* n^{te} *Wurzeln aus einer von 0 verschiedenen complexen Zahl* $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$; *diese n Wurzeln sind:*

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right], \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right], \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]. \end{cases}$$

Speciell für $r = 1$, $\vartheta = 0$ gilt die

Erklärung: *Eine complexe Zahl, deren* n^{te} *Potenz gleich* $+1$ *ist, heisst eine „*n^{te} *Wurzel der Einheit“ oder kurz eine „*n^{te} *Einheitswurzel“.*

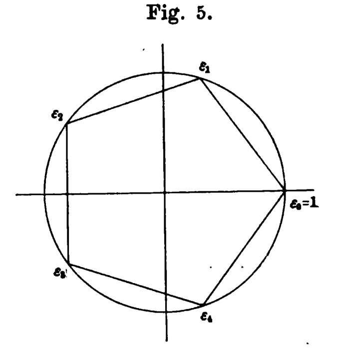
Lehrsatz: *Es giebt genau n verschiedene* n^{te} *Einheitswurzeln, die* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ *heissen mögen; zufolge (3) ist* $\varepsilon_0 = 1$ *und allgemein gilt:*

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_\nu = \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n},$$

zu bilden für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Formel (2), Nr. 5 lehrt, *dass die Einheitswurzel* ε_ν *als* n^{te} *Potenz von* ε_1 *dargestellt werden kann;* und der letzte Lehrsatz in Nr. 4 zeigt, *dass alle* n^{ten} *Wurzeln (3) aus der Zahl* $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ *durch Multiplication der ersten unter ihnen der Reihe nach mit* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ *gewonnen werden können.*

Fig. 5.



Die Bildpunkte der Zahlen ε_ν in der Zahlenebene liegen sämmtlich

auf dem Kreise mit dem Radius 1 um den Nullpunkt, der kurz der „*Einheitskreis*" heisse. Dabei theilen die Bildpunkte diesen Kreis in n gleiche Bogen der Grösse $\frac{2\pi}{n}$, und der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der positiven reellen Axe liefert den ersten Theilpunkt.

Lehrsatz: *Die n Bildpunkte der n^{ten} Einheitswurzeln ε_ν stellen die Ecken desjenigen dem Einheitskreise eingeschriebenen regulären n-Ecks dar, dessen erste Ecke bei $x = 1$, $y = 0$ liegt.*

Die beigefügte Figur bezieht sich auf den Fall $n = 5$ (Fig. 5 a. v. S.).

Für die niedersten Werthe n haben wir explicite:

$$(n = 2) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -1,$$

$$(n = 3) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \; \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$(n = 4) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = i, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = -i,$$

$$(n = 5) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \ldots$$

Allgemein nennen wir noch den

Lehrsatz: *Unter den n^{ten} Einheitswurzeln ist im Falle eines ungeraden n nur $\varepsilon_0 = 1$ reell, im Falle eines geraden n aber die beiden $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1$.*

7. Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

Erklärung: *Es sei eine unbegrenzte Anzahl complexer Zahlen*

$$(1) \quad \ldots \quad a_1 + ib_1, \; a_2 + ib_2, \; a_3 + ib_3, \ldots$$

vorgelegt, und es existire eine endliche reelle oder complexe Zahl g von folgender Art: Nach Auswahl einer „beliebig" kleinen reellen Zahl δ, die jedoch > 0 sein muss, soll es stets einen zu diesem δ gehörenden endlichen Index n geben, so dass für alle $m \geqq n$ der absolute Betrag $|g - a_m - ib_m| < \delta$ ist. Kann wirklich eine solche Zahl g angegeben werden, so heisst diese Zahl die „Grenze" der Zahlenreihe (1):

$$(2) \quad \ldots \quad g = \lim_{n=\infty} (a_n + ib_n)$$

Es seien nunmehr:

$$(3) \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2, \ldots$$

complexe Grössen in unendlicher Anzahl.

Erklärung: *Die aus den „Gliedern" $w_0, w_1, w_2, \ldots$ aufgebaute unendliche Reihe:*

$$(4) \quad \ldots \quad w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

heisst „convergent", wenn die Summe S_n der n ersten Glieder:

$$(5) \quad \ldots \quad S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$$

für lim. $n = \infty$ einer „bestimmten endlichen“ Grenze S zustrebt; ist dies nicht der Fall, so heisst die Reihe „divergent“. Im ersteren Falle heisst S der „Summenwerth“ oder kurz der „Werth“ der Reihe.

Unter Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile in den einzelnen Gliedern der Reihe setze man:

(6) $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$

Dann ist $S_n = U_n + i V_n$; und man hat im Falle der Convergenz der Reihe (4) bestimmte endliche Grenzwerthe $\lim_{n=\infty} U_n$ und $\lim_{n=\infty} V_n$, wie auch umgekehrt aus der Existenz derartiger Grenzen eine ebensolche Grenze $\lim_{n=\infty} S_n$ folgt.

Lehrsatz: *Die Reihe (4) ist stets und nur dann convergent, wenn die beiden aus reellen Gliedern bestehenden Reihen $(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)$ und $(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)$ convergent sind.* —

Erklärung: *Die in (4) gegebene Reihe heisst „unbedingt convergent“, falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

(7) . . . . . $|w_0| + |w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots$

convergent ist (vergl. die erste Erklärung in VII, 4).

Aus $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ folgt $|u_n| \leqq |w_n|$, $|v_n| \leqq |w_n|$, und also ist:

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-1}| \leqq |w_0| + |w_1| + \cdots + |w_{n-1}|,$$
$$|v_0| + |v_1| + \cdots + |v_{n-1}| \leqq |w_0| + |w_1| + \cdots + |w_{n-1}|.$$

Im Falle der unbedingten Convergenz der Reihe (4) ergiebt sich hieraus auf Grund von VII, 2, Lehrsatz III, dass die beiden Reihen $(u_0 + u_1 + \cdots)$ und $(v_0 + v_1 + \cdots)$ im Sinne von VII, 4 unbedingt convergent sind und also einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen endlichen Summenwerth haben. Letzteres gilt somit auch von der Reihe (4), da $S_n = U_n + i V_n$ ist.

Lehrsatz: *Eine unbedingt convergente Reihe aus complexen Gliedern hat einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen bestimmten endlichen Summenwerth.* —

Ist $z = x + iy$ eine complexe Variabele, und sind $c_0 = a_0 + ib_0$, $c_1 = a_1 + ib_1, \ldots$ complexe Constanten, so setze man $w_n = c_n z^n$; die unendliche Reihe:

(8) . . . . . $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$

heisst eine *„Potenzreihe mit complexen Gliedern“* oder kurz eine *„complexe Potenzreihe“.*

Für die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:

(9) . . . $|c_0| + |c_1| \cdot |z| + |c_2| \cdot |z|^2 + |c_3| \cdot |z|^3 + \cdots$

existirt nach VII, 5 entweder eine endliche reelle positive Zahl g, so dass für $|z| < g$ die Reihe (9) convergent ist, während für $|z| > g$ der Werth von $|c_n| \cdot |z|^n$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, oder

aber die Convergenz der Reihe (9) findet für jeden endlichen Werth z statt.

Lehrsatz: *Für eine complexe Potenzreihe giebt es entweder einen mit endlichem Radius g um den Nullpunkt der Zahlenebene gezogenen sogenannten „Convergenzkreis", so dass die Reihe für die dem Inneren dieses Kreises angehörenden Werthe z unbedingt convergent ist, während sie ausserhalb stets divergirt; oder aber die unbedingte Convergenz findet für jeden endlichen Werth von z statt.*

8. Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Sind zwei complexe Variabele $z = x + iy$ und $w = u + iv$ nach einem festen Gesetze derart an einander gebunden, dass zu dem einzelnen Werthe der „unabhängigen" Variabelen z stets ein Werth oder irgend eine Anzahl von Werthen der „abhängigen" Variabelen w gehört, so heisst w eine „Function" der complexen Variabelen z.*

Die Bezeichnungsweise der Functionen durch Abkürzungen $f(z)$, $F(z)$ u. s. w., die explicite und implicite Darstellungsweise der Functionen, die Begriffe der Inversion, der Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit, sowie der Begriff der Stetigkeit der Functionen übertragen sich von den in I, 2 ff. betrachteten reellen Functionen ohne Weiteres auf die Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Erscheint im Ausdruck der Function $f(z)$ die Variabele z mit irgend welchen complexen Constanten nur durch rationale Rechnungen verknüpft, so heisst $f(z)$ eine „rationale" Function; kommen neben rationalen Rechnungen auch Wurzelziehungen in endlicher Anzahl vor, so nennt man $f(z)$ eine „irrationale" Function von z.*

Lehrsatz: *Jede rationale Function $f(z)$ ist eine „eindeutige" Function ihres Argumentes; bei der Berechnung einer irrationalen Function liefert das Ausziehen der n^{ten} Wurzel aus einem bestimmten Ausdruck stets „n verschiedene Ausdrücke"* (cf. Nr. 6).

Um die elementaren transcendenten Functionen für ein complexes Argument zu definiren, benutze man die Entwickelungen in Nr. 7.

Erklärung: *Die „Exponentialfunction" e^z, sowie die „trigonometrischen Functionen" $\sin z$ und $\cos z$ sollen für ein beliebiges complexes z gegeben sein durch die Summenwerthe der Potenzreihen:*

$$(1) \quad \ldots \quad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

$$(2) \quad \ldots \quad \sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots,$$

$$(3) \quad \ldots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots.$$

Infolge VII, 9 und VII, 10 sind diese Reihen für jedes endliche z unbedingt convergent.

Durch eingehendere Ueberlegungen kann man zeigen, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Convergenzkreises eine *stetige* Function des Argumentes z darstellt.

Lehrsatz: *Die Functionen e^z, $\cos z$, $\sin z$ sind für alle endlichen Punkte der Zahlenebene, d. i. für alle endlichen Werthe z eindeutig und stetig; und sie gehen auf der reellen Axe, d. i. für $z = x$, in die früher allein betrachteten Werthe e^x, $\sin x$, $\cos x$ über.*

Erklärung: *Die Functionen $tg\, z$ und $ctg\, z$ werden durch:*

$$(4) \quad \ldots \quad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

für alle endlichen complexen Argumente z erklärt; und endlich werden die Functionen $\log z$, $arc \sin z$, $arc \cos z$, $arc\, tg\, z$ und $arc\, ctg\, z$ bez. als inverse Functionen von e^z, $\sin z$, $\cos z$, $tg\, z$ und $ctg\, z$ definirt.

Diese Functionen nehmen dann gleichfalls für reelle $z = x$ die von früher her bekannten Werthe $\log x$, $arc \sin x$ *etc.* an.

9. Zusammenhang der Exponentialfunction mit den Functionen $\sin z$ und $\cos z$.

Aus Formel (1) Nr. 8 folgt:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{1.2} + \frac{(iz)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Da nun $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \ldots$ ist, und da der Werth einer unbedingt convergenten Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder ist, so folgt weiter:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2..5} - \cdots\right).$$

Der Vergleich mit (2) und (3) Nr. 8 liefert die erste der Formeln:

$$(1) \quad \ldots \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

die zweite findet man auf analogem Wege.

Durch Combination der Formeln (1) findet man Ausdrücke für $\cos z$ und $\sin z$ durch die Exponentialfunction.

Lehrsatz: *Zwischen der Exponentialfunction und den trigonometrischen Functionen sin und cos besteht der durch die Formeln (1) und ihre Umkehrungen:*

$$(2) \quad \ldots \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

dargestellte Zusammenhang.

Speciell sind $\cos x$ und $\sin x$ mit *reellem* Argument x durch die Exponentialfunction mit *rein imaginärem* Argument ix darstellbar.

10. Die Additionstheoreme der Functionen e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Zwei unbedingt convergente Reihen

(1) $\quad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ und $w_0' + w_1' + w_2' + \cdots$

können mit einander multiplicirt werden und geben dabei die Reihe:

(2) $\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad w_0'' + w_1'' + w_2'' + \cdots,$

in welcher die einzelnen Glieder die Bedeutung haben:

$$w_0'' = w_0' w_0, \quad w_1'' = w_0' w_1 + w_1' w_0, \quad w_2'' = w_0' w_2 + w_1' w_1 + w_2' w_0, \ldots$$

Durch einfache (hier nicht auszuführende) Betrachtungen zeigt man, dass auch die Reihe (2) unbedingt convergent ist und als Werth das Product der Werthe der beiden Reihen (1) besitzt.

Die Anwendung dieses Ansatzes auf die beiden Reihen:

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^4}{4!} + \cdots,$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \frac{z_2^4}{4!} + \cdots$$

ergiebt offenbar:

$$e^{z_1} . e^{z_2} = 1 + \left(\frac{z_1}{1} + \frac{z_2}{1}\right) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1}{1} \cdot \frac{z_2}{1} + \frac{z_2^2}{2!}\right) + \cdots,$$

so dass hier w_n'' allgemein die Bedeutung hat:

$$w_n'' = \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_2}{1} + \cdots + \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!},$$

$$w_n'' = \frac{1}{n!}\left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n\right].$$

Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes (III, 3) liefert also:

$$e^{z_1} . e^{z_2} = 1 + \frac{z_1 + z_2}{1} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \cdots$$

Da hier rechts die Exponentialreihe für $z = z_1 + z_2$ steht, so ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Exponentialfunction mit dem Argumente* $(z_1 + z_2)$ *ist gleich dem Product der Exponentialfunctionen mit den Argumenten* z_1 *und* z_2*:*

(3) $\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} . e^{z_2}.$

Dieser Satz heisst das „*Additionstheorem*“ der Function e^z. —

Zufolge (1) Nr. 9 kann man die *Polardarstellung (1)*, S. 3, *einer complexen Zahl* folgendermaassen schreiben:

(4) . . . . $a + ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{\vartheta i}$,

und speciell hat man für die n^{ten} *Einheitswurzeln*:

(5) $\varepsilon_0 = 1,\quad \varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}},\quad \varepsilon_2 = e^{\frac{4\pi i}{n}}, \ldots,\quad \varepsilon_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$.

Da sich durch wiederholte Anwendung von (3) leicht $(e^z)^n = e^{nz}$ ergiebt, so findet man für $z = \vartheta i$ vermöge (1) Nr. 9 sofort den Moivre'schen Satz (1) Nr. 5 wieder. —

Indem man die linke und rechte Seite der Formel:

$$e^{\pm i(z_1 + z_2)} = e^{\pm i z_1} . e^{\pm i z_2}$$

vermöge (1) Nr. 9 ausdrückt, findet sich:

$$\cos(z_1 + z_2) \pm i\sin(z_1 + z_2) = (\cos z_1 \pm i\sin z_1)(\cos z_2 \pm i\sin z_2).$$

Entwickelt man die rechte Seite einmal für die oberen, sodann für die unteren Zeichen, so folgt durch Combination der beiden entspringenden Formeln der

Lehrsatz: *Für die Functionen sin z und cos z gelten die „Additionsformeln“:*

(6) . . . $\begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \end{cases}$

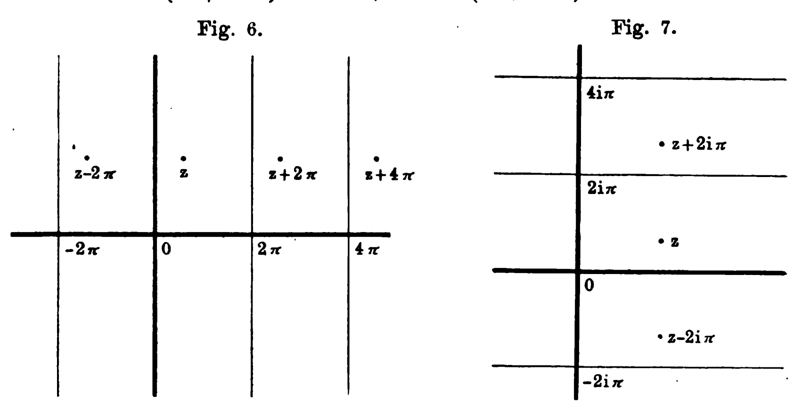
Für reelle Argumente kommt man auf die bekannten Additionstheoreme der Trigonometrie zurück.

11. Die Periodicität der Functionen $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Setzt man in (6) Nr. 10 für z_2 den Werth 2π ein und berücksichtigt $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, so folgt:

(1) . . $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$

Fig. 6. Fig. 7.



Lehrsatz: *Die Functionen sin z und cos z haben die „Periode“ 2π, d. h. die Werthe der Functionen ändern sich nicht, falls man das Argument z um 2π vermehrt oder vermindert.*

Wenn man demnach die Zahlenebene, wie Fig. 6 (a. v. S.) andeutet, durch Parallele zur *imaginären* Axe in lauter Streifen von der Breite 2π eintheilt, so werden die Functionen $\sin z$ und $\cos z$ für homologe Punkte der Streifen (z. B. die in der Figur markirten Punkte z, $z \pm 2\pi, \ldots$) immer wieder dieselben Werthe annehmen, wie für den ersten Punkt z. —

Ersetzt man in der Formel $e^{iz'} = \cos z' + i \sin z'$ das Argument z' durch $(z' + 2\pi)$, so folgt, dass $e^{iz' + 2i\pi}$ gleich $e^{iz'}$ ist. Schreibt man hier $iz' = z$, so folgt:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{z+2i\pi} = e^z.$$

Lehrsatz: *Die Exponentialfunction e^z hat die „imaginäre Periode“ $2i\pi$, d. h. der Werth der Function ändert sich nicht, falls man das Argument z um $2i\pi$ vermehrt oder vermindert.*

Wenn man demnach die Zahlenebene durch Parallele zur *reellen* Axe in lauter Streifen der Breite 2π eintheilt (cf. Fig. 7 a. v. S.), so wird die Function e^z in homologen Punkten dieser Streifen, d. i. für die zugehörigen Argumente z, stets gleiche Werthe annehmen.

Uebrigens folgt aus (1) und (2) die Gültigkeit der Gleichungen:

$$(3) \quad \sin(z + 2\nu\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\nu\pi) = \cos z, \quad e^{z+2\nu\pi i} = e^z$$

für *jede* ganze positive oder negative Zahl ν.

12. Die Function *log z* für complexes Argument.

Ist $w = u + iv$ und setzt man $e^w = z = re^{\vartheta i}$, so gilt explicite:

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta).$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären, sowie Combination der entspringenden Gleichungen kann man folgern:

$$e^u = r, \qquad u = \log r, \qquad v = \vartheta + 2\nu\pi,$$

wo $\log r$ der natürliche Logarithmus von r ist, welcher nach I, 6 und II, 7 einen *eindeutig* bestimmten Werth hat, und wo ν eine *beliebig* zu wählende ganze positive oder negative Zahl oder 0 bedeutet.

Invertirt man $e^w = z$ in $w = \log z$, so folgt:

$$\log z = \log r + (\vartheta + 2\nu\pi)i.$$

Lehrsatz: *Der natürliche Logarithmus $\log z$ für ein beliebiges complexes Argument z ist in der Art „unendlich vieldeutig“, dass der reelle Bestandtheil von $\log z$ als $\log r$ eindeutig bestimmt ist, während der Factor von i im imaginären Bestandtheil von $\log z$ gleich der Amplitude ϑ von z, vermehrt um ein beliebiges Multiplum von 2π, ist.*

Die Zahl ν kann man in (1) so auswählen, dass $0 \leqq \vartheta + 2\nu\pi < 2\pi$ wird. Diese Auswahl liefert den „*Hauptwerth*“ der Function $\log z$.

Soll $\log z$ reell sein, so muss z reell und positiv sein, und es ist der Hauptwerth zu nehmen.

Die Hauptwerthe der Logarithmen negativer reeller Argumente z sind complex, nämlich gleich $(\log r + \pi i)$.

13. Die cyklometrischen Functionen mit complexem Argument.

Den Entwickelungen in Nr. 9 entsprechend, lassen sich die cyklometrischen Functionen durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken, und man kann demnach die Eigenschaften jener Functionen aus denen der Function *log* ableiten.

Aus (1) Nr. 9 folgt nämlich, wenn man w statt z schreibt:

$$wi = \log(\cos w + i \sin w).$$

Setzt man somit $\sin w = z$ und also $w = \arcsin z$, so folgt:

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right);$$

und eine ähnliche Formel ergiebt sich für $\arccos z$.

Für $\operatorname{arctg} z$ knüpfe man an:

$$\frac{e^{wi}}{e^{-wi}} = e^{2wi} = \frac{\cos w + i \sin w}{\cos w - i \sin w} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,w}{1 - i\,\mathrm{tg}\,w}$$

und setze hier $\mathrm{tg}\,w = z$ und also $w = \operatorname{arctg} z$.

Lehrsatz: *Die Darstellung der Functionen $\arcsin z$ und $\operatorname{arc\,tg} z$ durch den Logarithmus wird geliefert durch:*

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \arcsin z = \dfrac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \\ \operatorname{arc\,tg} z = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right). \end{cases}$$

14. Differentiation und Integration der Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Von einer complexen Grösse, welche als stetige Variabele im Sinne der ersten Erklärung in Nr. 7 bezw. im Sinne von I, 13 die Null zur Grenze hat, ohne mit 0 identisch zu werden, sagt man, sie werde unendlich klein, oder man sagt auch (in übertragener Sprechweise), sie „sei" unendlich klein.*

Bei einer unendlich kleinen complexen Grösse ist demnach der absolute Betrag unendlich klein, während die Amplitude in keiner Weise beschränkt ist.

Benutzen wir die in Nr. 4 besprochene Deutung der complexen Zahlen durch parallel mit sich verschiebbare Strecken der Zahlenebene, welche nach *Länge* und *Richtung* fixirt sind, so würde die zu einem Differential dz gehörende Strecke eine verschwindend klein werdende Länge, aber beliebige Richtung besitzen.

Ist $f(z)$ irgend eine Function der complexen Variabelen z, so ist der dem Argumente z und dem Differential dz entsprechende Differentialquotient von $f(z)$ gegeben durch:

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z + dz) - f(z)}{dz}.$$

Hiermit ist analog wie in II, 2 der „*Grenzwerth*" der rechten Seite von (1) für den Fall gemeint, *dass bei beliebig, aber etwa fest gewählter Amplitude von dz der absolute Betrag von dz ohne Ende klein wird.*

Es gilt der merkwürdige

Lehrsatz: *Für alle oben betrachteten Functionen $f(z)$ ist der Differentialquotient eine „nur von z", aber „nicht von der Amplitude" des Differentials dz abhängende Function $f'(z)$, welche wieder als „Ableitung" bezeichnet wird.*

Es soll dies an folgenden Beispielen ausgeführt werden.

Für die Function $f(z) = z^n$ überträgt sich die am Anfange von II, 6 ausgeführte Rechnung unmittelbar und liefert $f'(z) = nz^{n-1}$ als Ableitung.

Für die transcendenten Functionen knüpfe man an die Potenzreihen. Durch eingehendere Betrachtungen lässt sich zeigen, dass man aus:

$$(2) \quad \ldots \quad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

durch gliedweises Differentiiren der rechten Seite die Potenzreihenentwickelung der Ableitung gewinnt:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots,$$

und dass diese Reihe denselben Convergenzkreis, wie die Reihe (2) besitzt:

Die Anwendung auf die in Nr. 8 angegebenen Reihen lehrt:

$$\frac{d(e^z)}{dz} = e^z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

Ueberhaupt findet man, dass alle aus II, 6 ff. bekannten Differentialformeln erhalten bleiben; und da die unbestimmte Integration nur die Inversion der Differentiation darstellt, so gilt der

Lehrsatz: *Alle in II und VI bei der Differentiation und der unbestimmten Integration unserer Functionen gewonnenen Formeln bleiben unverändert bestehen, falls an Stelle des damaligen reellen Argumentes x und Differentials dx complexe z und dz treten, sowie andererseits die etwa im Ausdruck von $f(z)$ vorkommenden constanten Coëfficienten complexe Werthe haben.*

Zu wesentlich veränderten Verhältnissen gelangt man indessen bei den *bestimmten* Integralen. An Stelle des auf der reellen Axe gelegenen Integrationsintervalles (cf. VI, 6) tritt jetzt die „*Integrationscurve*", welche die untere und obere Integralgrenze auf „irgend einem" in der Zahlenebene verlaufenden Wege verbindet.

Auf die hierdurch begründeten Complicationen wird an dieser Stelle nicht eingegangen.

X. Capitel.

Hülfssätze aus der Algebra.

1. Fundamentalsatz der Algebra nebst Anwendungen.

Es sei $f(x)$ eine rationale ganze Function des n^{ten} Grades:

$$(1)\quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

mit $n > 0$ und mit *reellen* Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, von denen der erste $a_0 \gtrless 0$ ist [1]).

In der Algebra zeigt man den

Lehrsatz: *Die „algebraische Gleichung" $f(x) = 0$, d. i. explicite:*

$$(2)\quad . \quad . \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

besitzt jedenfalls eine reelle oder complexe Zahl $x = a$ als „Lösung" oder „Wurzel", für welche $f(a) = 0$ ist.

Dieses Theorem wird wegen seiner grundlegenden Bedeutung für die gesammte Algebra als *„Fundamentalsatz der Algebra"* bezeichnet.

Aus dem Fundamentalsatz folgert man leicht, *dass die Gleichung (2) nicht nur eine, sondern immer n Wurzeln hat.*

Bei Division der Function $f(x)$ durch $(x - a)$ möge nämlich die Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades $f_1(x)$ als Quotient und die von x unabhängige Zahl r als Rest eintreten; dann gestattet $f(x)$ die nachfolgende Darstellung:

$$(3)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = (x - a) f_1(x) + r.$$

Setzt man $x = a$, so folgt $0 = r$, und also ist:

$$(4)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = (x - a) f_1(x).$$

Ist $n > 1$, so wende man dieselbe Betrachtung auf $f_1(x)$ an und findet $f_1(x) = (x - b) f_2(x)$, wo b eine reelle oder complexe Zahl und $f_2(x)$ eine Function $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Die Wiederholung der gleichen Ueberlegung für $f_2(x)$ u. s. w. liefert den

---

[1]) Die Mehrzahl der weiteren Entwickelungen bleibt bei *complexen* Coëfficienten $a_0, \ldots$ gültig, was jedoch im Texte nicht weiter verfolgt wird.

Lehrsatz: *Die ganze Function $f(x)$ vom n^{ten} Grade lässt sich in das Product von n „Linearfactoren" zerlegen:*

(5) . . . $f(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-n)$,

und hier sind $a, b, c, \dots, n$ die n „Wurzeln" der Gleichung $f(x)=0$.

Die bei der Abtrennung des letzten Linienfactors $(x-n)$ als restirender Factor auftretende Function $f_n(x)$ ist vom nullten Grade, d. i. constant; und zwar ergiebt sich als Werth dieser Constanten a_0.

Sind die Wurzeln $a, b, \dots, n$ theilweise (oder gar sämmtlich) einander gleich, so seien $a, b, \dots, l$ die verschiedenen unter ihnen; und es trete $(x-a)$ in (5) im Ganzen α-mal, $(x-b)$ aber β-mal u. s. w. auf.

Lehrsatz: *Im Falle „mehrfacher" Wurzeln hat man die Linearfactorenzerlegung:*

(6) . . $f(x) = a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\dots(x-l)^\lambda$,

wobei $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda = n$ ist.

Ist eine der Wurzeln complex, z. B. $a = a' + ia''$, so folgt aus $f(a'+ia'') = 0$ auf Grund des zweiten Lehrsatzes in IX, 2 wegen der Realität von $a_0, a_1, \dots, a_n$ die Gleichung $f(a'-ia'') = 0$.

Lehrsatz: *Wird eine algebraische Gleichung mit reellen Coëfficienten durch die complexe Zahl $(a'+ia'')$ befriedigt, so hat sie auch die zu $(a'+ia'')$ conjugirte Zahl $(a'-ia'')$ zur Wurzel.*

Schreibt man $(x-a)^\alpha . f_1(x)$ für die rechte Seite von (6), so ist

$$f'(x) = (x-a)^{\alpha-1}[\alpha f_1(x) + (x-a)f_1'(x)];$$

und da $f_1(a) \gtrless 0$ ist, so folgt der

Lehrsatz: *Eine α-fache Wurzel von $f(x)=0$ ist eine $(\alpha-1)$-fache Wurzel der durch Differentiation zu gewinnenden Gleichung $f'(x)=0$.*

Speciell für $\alpha = 1$ folgt $f'(a) \lesseqgtr 0$.

2. Partialbruchzerlegung der rationalen Functionen.

Eine rationale Function $R(x)$ lässt sich nach I, 4 als Quotient $g(x):f(x)$ zweier ganzen Functionen $g(x)$ und $f(x)$ darstellen.

Ist der Grad n des Nenners $f(x)$ nicht grösser als der Grad m des Zählers $g(x)$, so dividire man mit $f(x)$ in $g(x)$. Es entspringt als Quotient eine ganze Function $G(x)$ des Grades $(m-n)$ und als Rest eine ganze Function $h(x)$, deren Grad $< n$ ist:

(1) . . . . . . $$R(x) = G(x) + \frac{h(x)}{f(x)}.$$

Man stelle nun im Anschluss an (6) Nr. 1 mit Hülfe einer gleich zu bestimmenden Constante A_1 den Quotienten $h(x):f(x)$ so dar:

(2) $$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x) - A_1 f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

wobei der Grad des Zählers $[h(x) - A_1 f_1(x)]$ im letzten Gliede offenbar $< n$ ist.

Sind nicht gerade $f_1(x)$ und $h(x)$ zugleich vom 0ten Grade, d. i. constant [1]), so können wir A_1 so wählen, dass die ganze Function $[h(x) - A_1 f_1(x)]$ den Linearfactor $(x-a)$ bekommt:

$$h(x) - A_1 f_1(x) = (x-a) \cdot h_1(x).$$

Man hat nur zu diesem Zwecke unter A_1 weiterhin den endlichen constanten Werth $h(a) : f_1(a)$ zu verstehen.

Formel (2) liefert nun:

$$(3) \qquad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{h_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

wobei der Grad von $h_1(x)$ den von $(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)$ nicht erreicht.

Hiermit ist eine „Recursionsformel" gewonnen, welche die successive Erniedrigung des Grades der jeweils im Nenner stehenden Function um eine Einheit erlaubt.

Die wiederholte Anwendung der Formel (3) liefert den

Lehrsatz: *Die rationale Function $R(x)$ lässt sich mit Hülfe gewisser n Constanten $A_1, \ldots, L_\lambda$ in der Gestalt darstellen:*

$$\begin{aligned}(4) \quad R(x) = G(x) &+ \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l},\end{aligned}$$

wobei die rechts auftretenden Nenner durch die Linearfactorenzerlegung (6) Nr. 1 des Generalnenners $f(x)$ von $R(x)$ gegeben sind.

In Formel (4) ist die sogenannte *„Partialbruchzerlegung"* der rationalen Function $R(x)$ geleistet.

3. Partialbruchzerlegung bei lauter einfachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Hat $f(x) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln, so gilt der Ansatz:

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{N}{x-n}.$$

Zur Bestimmung der Constanten $A, \ldots$ multiplicire man mit $f(x)$:

$$(2) \qquad h(x) = A \cdot \frac{f(x)}{x-a} + B \cdot \frac{f(x)}{x-b} + \cdots + N \cdot \frac{f(x)}{x-n}$$

und nehme hier *lim.* $x = a$. Aus VIII, 1 folgt:

---

[1]) Dieser Fall subsumirt sich übrigens dem Schlussresultat unmittelbar.

$$(3) \quad \ldots \quad h(a) = A \cdot \lim_{x=a} \left[\frac{f(x)}{x-a}\right] = A \cdot f'(a),$$

wobei man beachte, dass nach dem letzten Lehrsatze in Nr. 1 der Werth $f'(a) \gtrless 0$ ist.

Lehrsatz: *Hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, so gilt die Partialbruchzerlegung:*

$$(4) \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{h(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots + \frac{h(n)}{f'(n)(x-n)}.$$

Hieraus ergiebt sich die sogenannte *„Lagrange'sche Interpolationsformel"*:

$$(5) \quad h(x) = h(a) \cdot \frac{f(x)}{f'(a)(x-a)} + h(b) \cdot \frac{f(x)}{f'(b)(x-b)} + \cdots$$
$$\cdots + h(n) \cdot \frac{f(x)}{f(n)(x-n)},$$

welche gestattet, eine den Grad n nicht erreichende rationale ganze Function $h(x)$ anzugeben, die für n speciell gewählte Argumente $a, b, \ldots$ vorgeschriebene Werthe $h(a)$, $h(b)$, ... hat.

Unter der (hier überall geltenden) Voraussetzung, dass $h(x)$ und $f(x)$ reelle Coëfficienten haben, kommen complexe Wurzeln von $f(x) = 0$ zufolge des vorletzten Lehrsatzes in Nr. 1 stets zu Paaren conjugirt vor. Dem einzelnen Paar conjugirter Wurzeln entsprechen alsdann conjugirt complexe Partialbrüche in (1) bez. (4).

Zufolge der Formel:

$$(6) \quad \frac{A' + iA''}{x - a' - ia''} + \frac{A' - iA''}{x - a' + ia''} = 2\,\frac{A'(x-a') - a''A''}{(x-a')^2 + a''^2}$$

lassen sich je zwei solche conjugirt complexe Partialbrüche in einen *in x quadratischen Ausdruck mit ausschliesslich reellen Coëfficienten* zusammenziehen.

XI. Capitel.

Weiterführung der Integralrechnung.

---

1. Integration rationaler Differentiale.

Erklärung: *Ist $R(x)$ eine beliebige rationale Function von x mit reellen Coëfficienten, so nennt man $R(x)\,dx$ ein „rationales Differential"* [1].

[1] Die Verallgemeinerung auf den Fall *complexer* Coëfficienten von $R(x)$ hat nach IX, 14 keine Schwierigkeit, wird aber hier nicht ausgeführt.

Um $\int R(x)dx$ zu bestimmen, tragen wir für $R(x)$ die Partialbruchzerlegung (4) S. 19 ein und verfahren nach VI, 3:

$$\int R(x)dx = \int G(x)dx + A_1\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha} + \cdots + A_\alpha\int\frac{dx}{x-a}$$
$$+ \cdots + L_1\int\frac{dx}{(x-l)^\lambda} + \cdots + L_\lambda\int\frac{dx}{x-l}.$$

Jedes einzelne der rechts stehenden Integrale kann nach VI, 2 und VI, 4 berechnet werden; es folgt:

$$\int R(x)dx = G_1(x) - \frac{A_1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + A_\alpha\cdot log(x-a)$$
$$- \cdots - \frac{L_1}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \cdots - \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + L_\lambda\cdot log(x-l),$$

wobei $G_1(x)$ wieder eine ganze Function ist.

Fasst man rechts alle rationalen Glieder als eine rationale Function $R_1(x)$ zusammen, so entspringt der

Lehrsatz: *Das Integral eines rationalen Differentials lässt sich in der Gestalt:*

$$(1)\quad \int R(x)dx = R_1(x) + A_\alpha log(x-a) + \cdots + L_\lambda log(x-l),$$

d. i. durch eine gleichfalls rationale Function $R_1(x)$, *vermehrt um eine Summe logarithmischer Glieder, darstellen, welche letztere den unterschiedenen Linearfactoren des Generalnenners* $f(x)$ *von* $R(x)$ *entsprechen.*

Bei lauter einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ hat man speciell:

$$(2)\int R(x)dx = G_1(x) + \frac{h(a)}{f'(a)}log(x-a) + \cdots + \frac{h(n)}{f'(n)}log(x-n).$$

Hierbei gestatten zwei conjugirt complexe Glieder unter Benutzung von IX, 13, Formel (1) folgende Zusammenziehung:

$$(3)\quad (A' + iA'')\,log(x-a'-ia'') + (A'-iA'')\,log(x-a'+ia'')$$
$$= A'\,log[(x-a')^2 + a''^2] - 2A''\,arctg\left(\frac{x-a'}{a''}\right) - \pi A''$$

in eine durchaus *reelle* Gestalt, welche übrigens, abgesehen von der Constante $\pi A''$[1]), durch directe Integration der rechten Seite in Formel (6) voriger Nummer hätte gewonnen werden können.

Als Beispiel diene:

---

[1]) Man bemerke, dass in den Integralformeln des Textes vom Zusatz einer besonderen Integrationsconstante der Kürze halber abgesehen wurde.

$$R(x) = \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{5}{6x} + \frac{9}{10(x-2)} - \frac{26}{15(x+3)},$$

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx = \frac{5}{6}\log x + \frac{9}{10}\log(x-2) - \frac{26}{15}\log(x+3).$$

2. Integration von Differentialen mit der n^{ten} Wurzel aus einer linearen Function.

Es seien a, b, c, d endliche reelle Constanten, für welche nicht gerade $ad = bc$ ist, und es sei n eine positive ganze Zahl.

Erklärung: *Unter* $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ *verstehe man eine Function, welche durch Ausübung irgend welcher „rationaler" Rechnungen auf x und die n^{te} Wurzel aus der linearen Function* $\frac{ax+b}{cx+d}$ *zu gewinnen ist.*

Um die Integration des zugehörigen Differentials $R\,dx$ zu leisten, substituire man nach VI, 4 eine neue Variabele y, welche mit x verknüpft ist durch:

$$(1) \quad \ldots \quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad x = \frac{dy^n - b}{-cy^n + a}.$$

Es ergiebt sich hierbei:

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = R\left(\frac{dy^n - b}{-cy^n + a}, y\right), \\ dx = \frac{n(ad-bc)y^{n-1}}{(a-cy^n)^2}\,dy, \end{cases}$$

so dass sich $R\,dx$ in y und dy als *rationales* Differential darstellt.

Man berechne dasselbe nach Nr. 1 und führe vermöge (1) wieder x ein.

Lehrsatz: *Das Integral eines Differentials, welches rational in x und der n^{ten} Wurzel einer linearen Function von x aufgebaut ist:*

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

lässt sich als rationale Function dieser n^{ten} Wurzel, vermehrt um eine Summe logarithmischer Glieder der allgemeinen Gestalt:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad K \log\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} - k\right)$$

darstellen, wo K und k Constanten sind.

Als Beispiel diene $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2} - 5}$. Man hat zu setzen $x - 2 = y^3$, $dx = 3y^2\,dy$ und findet:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}-5} = 3\int \frac{y^2\,dy}{y-5} = 3\int \left(y + 5 + \frac{25}{y-5}\right) dy.$$

Nach Berechnung des letzten Integrals und Wiedereinführung von x folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}-5} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x-2}\,\left(\sqrt[3]{x-2} + 10\right) + 75 \log\left(\sqrt[3]{x-2} - 5\right).$$

3. Integration von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function 2ten Grades.

Es seien a, b, c reelle Constanten, deren letzte nicht verschwindet.

Erklärung: *Unter* $R\left(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}\right)$ *wird eine Function von* x *verstanden, welche durch Ausübung irgend welcher „rationaler“ Operationen auf* x *und* $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ *zu berechnen ist.*

Betreffs des zugehörigen Differentials $R\,dx$ gilt der

Lehrsatz: *Das Differential* $R\left(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}\right) dx$ *lässt sich durch Substitution einer gewissen neuen Variabelen* y *auf ein in* y *„rationales Differential“ transformiren.*

Um diese Transformation möglichst unter Meidung complexer Grössen durchzuführen, werden drei Fälle unterschieden.

I. Im Falle $c > 0$ führe man y ein durch:

$$(1)\quad y = x\sqrt{c} + \sqrt{a + 2bx + cx^2}, \qquad 2x = \frac{y^2 - a}{b + y\sqrt{c}}.$$

Man berechnet hieraus:

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = y - \frac{\sqrt{c}}{2}\,\frac{y^2 - a}{b + y\sqrt{c}},$$

$$2\,dx = \frac{y^2\sqrt{c} + 2by + a\sqrt{c}}{(b + y\sqrt{c})^2}\,dy.$$

Es sind somit x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ in y rationale Functionen und dx in y ein rationales Differential; der Lehrsatz ist also in diesem Falle bewiesen.

II. Für $c < 0$ und $b^2 - ac < 0$ hat die quadratische Gleichung $a + 2bx + cx^2 = 0$ complexe Wurzeln. Es wird somit die ganze Function $(a + 2bx + cx^2)$ für kein reelles x verschwinden; und sie muss demnach, da sie für alle endlichen Werthe x stetig ist, entweder nur positive oder nur negative Werthe haben. Da aber für $x = 0$ der (wegen $c < 0$, $b^2 < ac$) negative Werth a vorliegt, so ist $(a + 2bx + cx^2)$ für *alle* reellen Argumente x negativ.

Hier sind also imaginäre Zahlen nicht zu meiden; man wird vielmehr

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = -i\sqrt{-a - 2bx - cx^2}$$
$$= -i\sqrt{a' + 2b'x + c'x^2}$$

setzen und $\sqrt{a' + 2b'x + c'x^2}$ nach der soeben in I. entwickelten Regel behandeln.

III. Trifft endlich $c < 0$ und $b^2 - ac > 0$ zu, so hat die Gleichung $a + 2bx + cx^2 = 0$ reelle Wurzeln α und $\beta > \alpha$, und man hat zu setzen $a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta)$.

Hier bediene man sich der Substitution:

$$(2) \quad \ldots \quad \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} = y, \qquad x = \frac{\beta + \alpha y^2}{1 + y^2},$$

so dass y wenigstens für das Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ reell ist.

Man berechnet leicht:

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = (\beta - \alpha)\sqrt{-c} \cdot \frac{y}{1 + y^2},$$
$$dx = 2(\alpha - \beta)\frac{y\,dy}{(1 + y^2)^2},$$

so dass obiger Lehrsatz auch in diesem Falle gilt.

Lehrsatz: *Ein aus x und der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function 2ten Grades rational aufgebautes Integral:*

$$(3) \quad \ldots\ldots \int R\left(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}\right) dx$$

lässt sich stets durch rationale Rechnungen und Logarithmirungen aus x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ berechnen.

4. Zweites Integrationsverfahren von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function 2ten Grades.

Die in Nr. 3 unterschiedenen Fälle fassen wir in

$$\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx$$

zusammen und verstehen hier unter c eine *positive* reelle Zahl.

Ein zweites Verfahren, dieses Integral zu berechnen, besteht aus folgenden Schritten:

I. Man substituire für x die in x lineare *ganze* Function:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{cx \pm b}{\sqrt{ac \mp b^2}},$$

wodurch sich ergiebt:

$$\sqrt{c}\,\sqrt{a + 2bx \pm cx^2} = \sqrt{ac \mp b^2}\,\sqrt{1 \pm y^2}, \qquad dx = \frac{\sqrt{ac \mp b^2}}{c}\,dy.$$

Man findet somit:

$$(2) \quad \int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx = \int R_1\left(y, \sqrt{1 \pm y^2}\right) dy,$$

wobei rechter Hand R_1 eine neue, aus y und $\sqrt{1 \pm y^2}$ vermöge rationaler Rechnungen zu gewinnende Function ist.

II. Stellt R_1 eine Summe mehrerer Glieder dar, so integrire man jedes Glied einzeln.

Jedenfalls lässt sich das einzelne Glied in die Gestalt:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{G_1(y) + G_2(y)\sqrt{1 \pm y^2}}{G_3(y) + G_4(y)\sqrt{1 \pm y^2}}$$

setzen, wobei $G_1(y), \ldots, G_4(y)$ ganze rationale Functionen von y sind; denn jede höhere als erste Potenz von $\sqrt{1 \pm y^2}$ ist in y entweder selbst rational oder das Product von $\sqrt{1 \pm y^2}$ und einer rationalen Function.

Durch Erweiterung des Ausdrucks (3) mit $\left(G_3 - G_4\sqrt{1 \pm y^2}\right)$ geht derselbe über in die Gestalt:

$$(4) \quad \ldots \quad \frac{G_5(y) + G_6(y)\sqrt{1 \pm y^2}}{G_7(y)} = R_2(y) + \frac{R_3(y)}{\sqrt{1 \pm y^2}},$$

wo $R_2(y)$ und $R_3(y)$ zwei neue rationale Functionen von y sind.

Das Integral $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right)dx$ lässt sich somit, abgesehen von Integralen rationaler Differentiale, reduciren auf eine Summe von Integralen der Gestalt:

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int \frac{R_3(y)\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

III. Trägt man in (5) für $R_3(y)$ nach X, 2 die Partialbruchentwickelung ein und integrirt jedes Glied, *so liegt ein Aggregat von Integralen der beiden Typen vor:*

$$(6) \quad \ldots \quad \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}, \qquad \int \frac{dy}{(y-a)^n\sqrt{1 \pm y^2}},$$

wo n eine ganze positive Zahl oder 0 bedeutet.

IV. Ist im zweiten Integral (6) $n > 0$, so setze man:

$$y - a = \frac{1}{z}, \qquad dy = -\frac{dz}{z^2},$$

worauf sich ergiebt:

$$\frac{dy}{(y-a)^n\sqrt{1 \pm y^2}} = -\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{z^2 \pm (az+1)^2}} = -\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{A + 2Bz \pm Cz^2}}.$$

Letzteres Differential behandle man nach I, d. i. vermöge der zu (1) analogen Substitution. Da es sich hierbei um Substitution einer *ganzen* linearen Function von z als neuer Variabelen handelt, so wird man zu Integralen des ersten Typus (6) geführt.

Es lässt sich $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right)dx$, abgesehen von Inte-

gralen rationaler Differentiale, auf ein Aggregat von Integralen des Typus $\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$ *reduciren.*

V. Durch partielle Integration (cf. VI, 5) folgt weiter:

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \int \frac{\pm y\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} \mp (n-1) \int \left(y^{n-2} \int \frac{\pm y\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}\right) dy,$$

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \sqrt{1 \pm y^2} \mp (n-1) \int y^{n-2} \sqrt{1 \pm y^2}\,dy.$$

Erweitert man unter dem letzten Integral mit $\sqrt{1 \pm y^2}$, so folgt:

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \sqrt{1 \pm y^2} \mp (n-1) \int \frac{y^{n-2}\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} - (n-1) \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

Setzt man das letzte Glied nach links hinüber, so ergiebt sich eine *Recursionsformel, welche gestattet, das erste Integral (6) auf ein ebensolches mit einem um zwei Einheiten erniedrigten Exponenten n zu reduciren:*

$$(7) \quad \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \frac{y^{n-1}\sqrt{1 \pm y^2}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \int \frac{y^{n-2}\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

VI. Durch wiederholte Anwendung der Formel (7) wird man auf eines der folgenden vier Integrale geführt:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \sqrt{1 \pm y^2},$$

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = log\,(y + \sqrt{1 + y^2}),$$

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = arc\,sin\,y.$$

Das Integral (8), welches soeben bereits unter V. gebraucht wurde, findet man durch die Substitution $\sqrt{1 \pm y^2} = z$, Formel (9) beweist man vermöge der unter I., S. 23, gegebenen Regel, das dritte Integral endlich ist aus VI, 2 bekannt.

Lehrsatz: *Das Integral* $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx$ *lässt sich durch eine Kette von Transformationen, abgesehen von Integralen rationaler Differentiale, auf ein Aggregat von Integralen des ersten Typus (6) S. 25 reduciren. Die letzteren Integrale werden vermöge der Recursionsformel (7) auf die in (8), (9) und (10) berechneten Integrale zurückgeführt.*

Nach der hiermit dargelegten Methode sind folgende häufig vorkommende Beispiele berechnet:

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right),$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin\left(\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}\right),$$

$$(13) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} - \frac{b}{c\sqrt{c}} \log\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right),$$

$$(14) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx-cx^2} + \frac{b}{c\sqrt{c}} \arcsin\left(\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}\right).$$

5. Fundamentalsatz über die Integrale algebraischer Differentiale.

Erklärung: *Ist $\varphi(x)$ im Sinne von I, 10 eine elementare algebraische Function, so heisse $\varphi(x)dx$ ein „elementares algebraisches Differential".*

In den vorangehenden Nummern ist die Integration von $\varphi(x)dx$ für folgende drei Fälle durchgeführt:

$$\text{I. } \varphi(x) = R(x), \quad \text{II. } \varphi(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

$$\text{III. } \varphi(x) = R\left(x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\right),$$

und damit sind mittelbar auch alle diejenigen Fälle behandelt, bei denen $\varphi(x)$ additiv aus mehreren solchen Functionen aufgebaut ist.

Es gilt aber folgender fundamentale

Lehrsatz: *Die drei genannten Typen algebraischer Differentiale sind die einzigen, bei denen $f(x) = \int \varphi(x)\,dx$ eine „elementare" algebraische oder transcendente Function ist. Kommt in $\varphi(x)$ entweder die Quadratwurzel aus einer den zweiten Grad übersteigenden ganzen Function oder aber die höhere Wurzel aus einer nicht-linearen Function vor, so ist $f(x)$ im Allgemeinen eine der Elementarmathematik nicht bekannte „höhere" transcendente Function.*

Die den Integralen der Gestalt:

$$\int R\left(x, \sqrt{a+3bx+3cx^2+dx^3}\right) dx$$

zugehörigen sogen. *„elliptischen"* Functionen bilden die niederste Classe dieser neuen transcendenten Functionen.

6. Partielle Integration bei transcendenten Differentialen.

Erklärung: *Ist $\varphi(x)$ eine transcendente Function, so heisst $\varphi(x)\,dx$ ein „transcendentes" Differential.*

Bei der Integration transcendenter Differentiale verwendet man gelegentlich die partielle Integration (cf. VI, 5) mit Vortheil, wie an folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

I. *Integration der Differentiale $\sin^m x \cos^n x\,dx$.*

Formel (3) in VI, 5 liefert:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \int \sin^m x\,d\sin x$$
$$+ (n-1)\int \left(\cos^{n-2} x \sin x \int \sin^m x\,d\sin x\right) dx,$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \sin^{m+2} x\,dx.$$

Setzt man im letzten Integral $\sin^m x\,(1 - \cos^2 x)$ für $\sin^{m+2} x$, so folgt:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \sin^m x\,dx - \frac{n-1}{m+1}\int \cos^n x \sin^m x\,dx$$

Bringt man hier das letzte Glied rechter Hand nach links, so ergiebt sich die erste der beiden folgenden Recursionsformeln:

$$(1) \int \sin^m x \cos^n x\,dx =$$
$$\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx,$$

$$(2) \int \sin^m x \cos^n x\,dx =$$
$$-\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx;$$

die zweite Formel beweist man analog.

Lehrsatz: *Das Integral des Differentials $\sin^m x \cos^n x\,dx$, in welchem m und n irgend welche nicht-negative ganze Zahlen sind, lässt sich vermöge der Recursionsformeln (1) und (2) auf eines der vier Integrale:*

$$\int dx = x, \int \cos x\,dx = \sin x, \int \sin x\,dx = -\cos x,$$
$$\int \sin x \cos x\,dx = {}^1/_2 \sin^2 x.$$

reduciren; das fragliche Integral ist demnach durch „elementare" transcendente Functionen darstellbar.

II. *Integration der Differentiale $x^n e^x dx$ und $\frac{e^x}{x^n} dx$.*

Die Formel der partiellen Integration ergiebt:

$$\int x^n e^x dx = x^n \int e^x dx - n \int (x^{n-1} \int e^x dx) dx,$$

$$(3) \quad . \ . \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

Ist n von 1 verschieden, so gilt weiter:

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx = e^x \int \frac{dx}{x^n} - \int \left(e^x \int \frac{dx}{x^n}\right) dx,$$

$$(4) \quad . \ . \int \frac{e^x}{x^n} dx = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx.$$

Lehrsatz: *Bedeutet n eine nicht-negative ganze Zahl, so lässt sich $\int x^n e^x dx$ durch die Recursionsformel (3) schliesslich auf $\int e^x dx = e^x$ reduciren; beim Integral $\int \frac{e^x}{x^n} dx$ mit positiver ganzer Zahl n gelangt man vermöge (4) schliesslich zum Integral $\int \frac{e^x}{x} dx$, welches eine „höhere" transcendente Function darstellt.*

III. *Integration der Differentiale $x^{\pm n} \sin x\, dx$ und $x^{\pm n} \cos x\, dx$.*

Hier liefert die partielle Integration die Recursionsformeln:

$$(5) \quad \int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx,$$

$$(6) \quad \int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx,$$

$$(7) \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx,$$

$$(8) \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx,$$

wobei in den beiden letzten Formeln $n > 1$ gilt.

Lehrsatz: *Die Integrale $\int x^n \sin x\, dx$ und $\int x^n \cos x\, dx$ lassen sich, falls n eine nicht-negative ganze Zahl ist, durch elementare transcendente Functionen darstellen. Die Integrale $\int \frac{\sin x}{x^n} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x^n} dx$ mit einer ganzen Zahl $n > 0$ führen dagegen (abgesehen von elementaren transcendenten Gliedern) auf die „höheren" transcendenten Functionen $\int \frac{\sin x}{x} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x} dx$. —*

Weitere Beispiele, bei denen man die partielle Integration mit Vortheil verwendet, sind die folgenden:

$$\int x^n \, arc\sin x \, dx, \quad \int x^n arc\, tg\, x \, dx, \quad \int x^n (\log x)^m \, dx.$$

7. Integration durch unendliche Reihen.

Die Function $\varphi(x)$ liefere die Mac Laurin'sche Entwickelung:

(1) . . . $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$

welche innerhalb des Intervalls $-g < x < +g$ convergent sei.

Durch gliedweise Integration der auf der rechten Seite von (1) stehenden Reihe folgt (unter C die Integrationsconstante verstanden):

(2) . . . $C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \cdot \frac{x^4}{4} + \cdots$

Man kann zeigen (was jedoch hier nicht ausgeführt wird), *dass die Reihe (2) in demselben Intervall $-g < x < +g$ convergirt, und dass sie innerhalb dieses Intervalles den Werth von $\int \varphi(x) dx$ darstellt:*

(3) . . $\int \varphi(x)\, dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a^2}{3} x^3 + \cdots$

Als Beispiel gelte:

(4) $\int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{x^3}{2!\,.\,3^2} + \frac{x^5}{4!\,.\,5^2} - \frac{x^7}{6!\,.\,7^2} + \cdots,$

eine Reihe, die für alle endlichen x convergent ist.

Man besitzt in dieser Potenzreihe ein Mittel, *die Werthe neuer transcendenter Functionen, z. B. der Function $\int \frac{\sin x}{x} dx$, für specielle Argumente x angenähert zu berechnen.*

8. Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in ein unendliches Product.

Nimmt man in (2) Nr. 6 die ganze Zahl $m > 1$ und $n = 0$, und integrirt man zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx.$$

Bei wiederholter Anwendung dieser Recursionsformel kommt man, je nachdem m ungerade oder gerade ist, schliesslich auf das erste oder zweite der folgenden Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(1) \quad . \; . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

$$(2) \quad . \; . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Da nun im Innern des ganzen Integrationsintervalls $\sin x$ einen positiven echten Bruch darstellt, so gilt für jedes ganzzahlige $m > 0$:

$$\sin^m x > \sin^{m+1} x \quad \text{und also} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1} x\, dx,$$

wie aus der Bedeutung des bestimmten Integrals (VI, 6) hervorgeht.

Setzt man in der letzten Ungleichung erst $m = 2n - 1$ und sodann $m = 2n$, so ergeben sich aus (1) und (2) die Ungleichungen:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n},$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

oder nach leichter Umrechnung:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Für $\lim. n = \infty$ nähern sich die rechten Seiten der beiden letzten Ungleichungen der gleichen Grenze. Es ist also:

$$(3) \quad . \; . \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}\right),$$

was man auch ausdrückt durch den

Lehrsatz: *Die Zahl* $\frac{\pi}{2}$ *lässt sich in das unendliche Product entwickeln:*

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

9. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Gelingt es nicht, den Werth eines bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ durch voraufgehende Berechnung des zugehörigen unbestimmten Integrals zu ermitteln, so stehen verschiedene, auf der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals basirende Formeln zur angenäherten Berechnung des Integralwerthes zur Verfügung.

I. Man theile, wie in VI, 6, Fig. 39, das den Werth $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ repräsentirende Flächenstück durch Parallele zur y-Axe in n Streifen der gleichen Breite $h = \frac{b-a}{n}$.

Dabei mögen die zu $x = a, a+h, a+2h, \ldots, b$ gehörenden Ordinaten sich zu:

$$(1)\quad y_0 = \varphi(a),\; y_1 = \varphi(a+h),\; y_2 = \varphi(a+2h), \ldots,\; y_n = \varphi(b)$$

berechnen.

Ersetzt man den Inhalt des einzelnen Streifens durch denjenigen des in Fig. 39, VI, 6, schraffirten Rechtecks, so erhält man als *erste Näherungsformel für den gesuchten Integralwerth:*

$$(2)\quad . \quad . \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}).$$

II. Eine in der Regel grössere Annäherung an den wahren Integralwerth gewinnt man, falls man den einzelnen Streifen durch das *Trapez* ersetzt, das die betheiligten Ordinaten y_k und y_{k+1} zu Gegenseiten hat.

Dieser Annahme entspringt die *zweite Näherungsformel:*

$$(3)\quad . \quad . \int_a^b \varphi(x)\,dx = h(1/2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + 1/2\, y_n).$$

III. Eine dritte Näherungsformel ergiebt sich aus einer eigenthümlichen Verwendung der Parabel.

Durch die oberen Endpunkte dreier auf einander folgender Ordinaten y_k, z. B. y_0, y_1, y_2, lässt sich nur *eine* Parabel mit zur y-Axe paralleler Axe legen. Diese Parabel muss nämlich die Gleichung haben $y = px^2 + qx + r$; und wenn wir also die zu y_k gehörende Abscisse kurz x_k nennen, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$(4)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} p x_0^2 + q x_0 + r = y_0, \\ p x_1^2 + q x_1 + r = y_1, \\ p x_2^2 + q x_2 + r = y_2, \end{cases}$$

aus welchen sich die drei Coëfficienten p, q, r *eindeutig* bestimmen.

Für gewöhnlich wird nun der zwischen den Endpunkten der Ordinaten y_0, y_2 verlaufende Bogen dieser Parabel sich daselbst der Curve $y = \varphi(x)$ enger anschliessen, als die unter II. benutzten geraden Verbindungslinien der Endpunkte von y_0, y_1, y_2.

Ersetzt man demnach bei der oberen Begrenzung der beiden ersten Streifen die Curve $y = \varphi(x)$ durch die Parabel, so wird der Inhalt dieser Streifen gegeben sein durch:

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = {}^1/_3\, p\,(x_2^3 - x_0^3) + {}^1/_2\, q\,(x_2^2 - x_0^2) + r\,(x_2 - x_0),$$
$$= {}^1/_6\,(x_2 - x_0)\,[2p(x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2) + 3\,q\,(x_2 + x_0) + 6\,r].$$

Hier kann man $x_2 - x_0 = 2h$ und den in der zweiten Klammer stehenden Ausdruck auf Grund von (4) gleich $(y_0 + 4y_1 + y_2)$ setzen, so dass sich der Inhalt der beiden ersten Streifen angenähert in der Gestalt ${}^1/_3\,h(y_0 + 4y_1 + y_2)$ darstellt.

Zur Verwerthung dieses Ansatzes muss n gerade gewählt werden, $n = 2m$, und man hat die $2m$ Streifen zu Paaren zusammenzufassen.

Man gewinnt so als *dritte Näherungsformel:*

$$(5)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = {}^1/_3\,h\,[(y_0 + y_{2m}) + 2\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})$$
$$+ 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})].$$

Die hiermit gegebene Vorschrift zur angenäherten Berechnung des bestimmten Integrals heisst die „*Simpson'sche Regel*“.

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

1. Die Functionen zweier unabhängiger Variabelen.

Es seien x und y zwei *von einander unabhängige* reelle Veränderliche.

Erklärung: *Ist die Variabele z derart an die beiden „unabhängigen“ Variabelen x und y gebunden, dass zu dem einzelnen Werthepaar x, y stets ein Werth oder irgend eine Anzahl (die Null eingeschlossen) von Werthen der „abhängigen“ Variabelen z gehört, so heisst z eine „Function“ der beiden unabhängigen Variabelen x und y.*

Auf diese Functionen zweier Veränderlichen überträgt man alle Begriffsbestimmungen, Bezeichnungsweisen und Eintheilungsprincipien, welche in I, 2 ff. für die Functionen einer Variabelen ausgebildet wurden.

So braucht man $z = f(x, y)$ oder $z = g(x, y)$ etc. als symbolische Bezeichnungen für Functionen; man nennt z. B. $z = ax^3 + bxy - cy^5$ eine rationale ganze, $z = \sin(5x - 7y)$ eine transcendente Function von x und y u. s. w.

Um eine *geometrische Versinnlichung* der einzelnen Function $z = f(x, y)$ zu gewinnen, verstehe man unter x, y, z rechtwinklige Coordinaten im Raume.

Bei den für uns in Betracht kommenden Functionen $f(x, y)$ stellt alsdann die Gleichung $z = f(x, y)$, im Sinne der analytischen Geometrie des Raumes gedeutet, eine *Fläche* dar.

Lehrsatz: *Die bei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch $z = f(x, y)$ dargestellte Fläche benutzt man als geometrisches Bild der Function $f(x, y)$; die in den einzelnen Punkten (x, y) der xy-Ebene senkrecht errichteten Coordinaten z der Flächenpunkte liefern direct die Functionswerthe $f(x, y)$.*

2. Differentiation der Functionen $z = f(x, y)$.

Erklärung: *Falls man $z = f(x, y)$ bei constant gedachtem y (resp. x) als Function von x (resp. y) allein differentiirt, so spricht man von einer „partiellen" Differentiation von $f(x, y)$ nach x (resp. y) und nennt das Ergebniss „partielle" Ableitung (Differentialquotient) nach x (resp. y) bezw. „partielles" Differential nach x (resp. y).*

Die partielle Ableitung von $z = f(x, y)$ nach x wird durch:

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

bezeichnet, das partielle Differential nach x aber durch:

$$(2) \quad \partial_x z = \partial_x f(x, y) = f'_x(x, y)\, dx = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) dx;$$

und entsprechende Bezeichnungen braucht man für die Differentiation nach y.

So hat man z. B. für die Function $z = ax^3 + bxy - cy^5$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3ax^2 + by, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = bx - 5cy^4.$$

Erklärung: *Falls man die beiden Variabelen x und y zugleich um die (von einander unabhängigen) Differentiale dx und dy ändert, möge die Function $z = f(x, y)$ die Aenderung dz erfahren. Man nennt alsdann dz das zu den beiden Differentialen dx und dy gehörende „totale" Differential der Function $z = f(x, y)$.*

Entspricht den endlichen Aenderungen Δx und Δy die Aenderung Δz der Function $z = f(x, y)$, so gilt:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

und also, falls man abkürzend $y + \Delta y = y_1$ setzt:

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Lässt man hier Δx und Δy in die Differentiale dx und dy übergehen, so folgt für das totale Differential dz:

$$dz = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Bei den für uns in Betracht kommenden elementaren Functionen darf man nun annehmen, dass die Function $f'_x(x, y)$ für alle solche Werthepaare x, y, für welche sie endlich ist, auch stetig ist. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich somit, da $lim.\ y_1 = y$ ist:

$$(3) \quad \ldots \quad dz = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Lehrsatz: *Das totale Differential $dz = df(x, y)$ der Function $z = f(x, y)$ ist gleich der Summe der beiden zu dx und dy gehörenden partiellen Differentiale von $z = f(x, y)$.*

Für die Function $z = ax^3 + bxy - cy^5$ hat man somit:

$$dz = (3ax^2 + by)dx + (bx - 5cy^4)dx.$$

3. Differentiation impliciter Functionen.

Wird für irgend ein Werthepaar x, y die Function $z = f(x, y) = 0$ und gestattet man fortan den Argumenten x, y nur noch solche Veränderungen, dass dauernd $z = f(x, y) = 0$ ist, so sind hierdurch x und y in gegenseitige Abhängigkeit gesetzt.

Für die Differentiale dx und dy hat dies die Folge, dass „zusammengehörende" dx und dy stets $dz = 0$ liefern, d. i. ausführlich

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Lehrsatz: *Ist y als Function von x „implicite" durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so berechnet man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vermöge partieller Differentiationen auf Grund der zweiten Gleichung (1).*

So findet man z. B. bei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{offenbar} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

in Uebereinstimmung mit V, 5.

4. Verallgemeinerung auf Functionen beliebig vieler Variabelen.

Ist die Anzahl n der vorliegenden unabhängigen Variabelen > 2, so bezeichnet man letztere zweckmässig durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Begriff und Eintheilung der Functionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dieser n Variabelen wird man von den oben behandelten Fällen $n = 1$ und $n = 2$ aus sofort für beliebiges n verallgemeinern.

Differentiirt man die Function $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bei constant gedachten $(n - 1)$ Variabelen $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ als Function von x_k allein, so gewinnt man die *„partielle Ableitung"* bezw. das *„partielle Differential"* nach x_k:

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = f'_{x_k}(x_1, x_2 \ldots, x_n),$$

$$(2) \quad \partial_{x_k} y = \partial_{x_k} f(x_1, \ldots, x_n) = f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} dx_k$$

Aendert man gleichzeitig die n Argumente um die n von einander unabhängig zu wählenden Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, so heisst die entsprechende Aenderung $dy = df(x_1, \ldots, x_n)$ der Function das zu $dx_1, \ldots, dx_n$ gehörende *„totale Differential"*.

Für dieses totale Differential gilt der

Lehrsatz: *Das zu $dx_1, \ldots, dx_n$ gehörende totale Differential dy ist gleich der Summe aller n partiellen Differentiale von $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, welche zu $dx_1, \ldots, dx_n$, einzeln genommen, gehören:*

$$(3) \quad dy = df(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Der Beweis ergiebt sich durch Verallgemeinerung der bei $n = 2$ in Nr. 2 befolgten Ueberlegung.

Setzt man $x_1 = \varphi_1(x)$, $x_2 = \varphi_2(x), \ldots, x_n = \varphi_n(x)$ als Functionen einer einzigen Variabelen x an, so wird dadurch offenbar auch $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Function von x allein, die man als eine zusammengesetzte Function bezeichnen wird (cf. I, 11).

Hier werden dann $dx_1, \ldots, dx_n$ die zu dx gehörenden Differentiale der Functionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Die Formel (3) liefert daraufhin den

Lehrsatz: *Ist $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ und sind $x_1 = \varphi_1(x), \ldots x_n = \varphi_n(x)$ Functionen der einen unabhängigen Variabelen x, so ist auch y eine Function von x allein, und man berechnet die Ableitung von y nach x auf Grund der Formel:*

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx}.$$

Für $n = 1$ ergiebt sich die Regel von II, 15 wieder.

Ist z. B. $y = x_2^{x_1}$, so ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = x_1 \, . \, x_2^{x_1 - 1} \frac{dx_2}{dx} + x_2^{x_1} \log x_2 \cdot \frac{dx_1}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \cdot \varphi_2'(x) + \varphi_1'(x) \log \varphi_2(x) \right]$$

in Uebereinstimmung mit Formel (1) in II, 17.

5. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung.

Erklärung: *Wenn man die nach x_i genommene partielle Ableitung f'_{x_i} der Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ partiell nach x_k differentiirt, so entspringt die durch:*

$$(1)\quad \ldots \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} = f''_{x_i, x_k}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

zu bezeichnende „partielle zweite Ableitung“ (Ableitung zweiter Ordnung) von $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach x_i und x_k. Entsprechend definirt man die partielle dritte Ableitung f'''_{x_i, x_k, x_l} u. s. w.

Bei einer Function $z = f(x, y)$ zweier Variabelen hat man demnach zunächst die vier partiellen zweiten Ableitungen:

$$(2)\quad \ldots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Bei den elementaren Functionen gilt der

Lehrsatz: *Das Ergebniss mehrerer nach einander ausgeübter Differentiationen nach verschiedenen Argumenten ist von der Reihenfolge dieser Differentiationen unabhängig.*

Um z. B. die Identität der beiden Functionen f''_{xy} und f''_{yx} zu beweisen, nehmen wir an, dass für alle hier in Betracht kommenden Werthe der Argumente f, f'_x, f'_y, f''_{xy} und f''_{yx} eindeutig und stetig sind.

Zufolge VII, 7 gilt nun, falls $F(x)$ sammt der Ableitung $F'(x)$ im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig ist:

$$(3)\quad F(x + h) - F(x) = F'(x + \vartheta h) \, . \, h, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Man trage in Formel (3) ein:

$$F(x) = f(x, y + k) - f(x, y),$$

bei constanten y und k als Function von x allein betrachtet; und man findet auf diese Weise:

$$f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$
$$= [f'_x(x + \vartheta h, y + k) - f'_x(x + \vartheta h, y)] \cdot h.$$

Wendet man die Regel (3), für y und k an Stelle von x und h geschrieben, auf den Ausdruck in der letzten Klammer an, so folgt:

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= f''_{xy}(x+\vartheta h, y+\vartheta' k) \,.\, hk.$$

Nun kann man aber die vorstehende Rechnung auch in der Art ausführen, dass man erst y und dann x als variabel ansieht; es findet sich so auf ganz analogem Wege für die linke Seite der letzten Gleichung:

$$f''_{yx}(x+\vartheta'' h,\ y+\vartheta''' k) \,.\, hk.$$

Dieserhalb muss die Gleichung bestehen:

$$f''_{xy}(x+\vartheta h,\ y+\vartheta' k) = f''_{yx}(x+\vartheta'' h,\ y+\vartheta''' k).$$

Lässt man hier h und k gleichzeitig bis 0 abnehmen, so folgt, der Behauptung entsprechend, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

So findet man z. B. für $z = 5x^2y^3 - e^{3x+y}$ thatsächlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 30\,xy^2 - 3\,e^{3x+y}.$$

6. Die totalen Differentiale höherer Ordnung.

Erklärung: *Sieht man das zu dx und dy gehörige totale Differential dz einer Function $z = f(x, y)$ als Function von x und y allein an und berechnet von dieser Function dz das totale Differential für dieselben Differentiale dx und dy der Argumente, so entspringt das zu dx und dy gehörende „totale Differential zweiter Ordnung“ $d(dz) = d^2z$. Entsprechend definirt man die totalen Differentiale der 3ten, 4ten u. s. w. Ordnung d^3z, d^4z, ...*

Nach dem am Schlusse von Nr. 2 aufgestellten Lehrsatze folgt:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\,dy.$$

Sieht man aber, der Definition von d^2z gemäss, in dem durch (3) Nr. 2 entwickelten Ausdruck von dz nur x bezw. y bei constanten dx und dy als variabel an, so ist:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{dy\,\partial x}\,dy, \qquad \frac{\partial(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy.$$

Unter Benutzung des letzten Lehrsatzes voriger Nummer ergiebt sich somit:

$$(1) \quad . \quad . \quad d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Allgemein gilt der

Lehrsatz: *Das zu dx und dy gehörende totale Differential n^{ter} Ordnung der Function $z = f(x, y)$ stellt sich mit Hülfe der in III, 3 erklärten Binomialcoëfficienten der n^{ten} Potenz in der Gestalt dar:*

$$(2)\quad d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy$$
$$+ \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Der Beweis wird durch den Schluss der „vollständigen Induction" geführt (cf. III, 4).

Ist die Formel (2) für n richtig, so berechne man nach dem Schlusssatze von Nr. 2 das Differential $d(d^n z) = d^{n+1} z$, indem man die Summe der partiellen Differentiale der rechten Seite von (2) bildet. Unter Benutzung der ersten Formel (2) in III, 3 gewinnt man die für $(n+1)$ statt n gebildete Formel (2), so dass sie auch noch für $(n+1)$ gilt. Da Formel (2) aber in (1) für $n = 2$ wirklich bewiesen ist, so gilt sie allgemein. —

Die Definition der totalen Differentiale höherer Ordnung einer Function $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n unabhängigen Variabelen $x_1, \ldots, x_n$ wird man nach Analogie des Falles $n = 2$ sofort vollziehen.

Als totales Differential 2ter Ordnung merke man an:

$$(3)\quad d^2 z = d^2 f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n.$$

7. Die Taylor'sche Reihe für Functionen mehrerer Variabelen.

Es seien u, v reelle Variabele und $f(u, v)$ eine Function derselben; dann ist:

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial u^n} du^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1} dv} du^{n-1} dv + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial v^n} dv^n.$$

Die zunächst willkürlich zu wählenden du, dv sollen jetzt die zu dt gehörenden Differentiale der Functionen $u = x + ht$, $v = y + kt$ sein, welche letztere man bei constanten x, y, h, k in Abhängigkeit von t betrachte.

Da sich hier $du = h\,dt$, $dv = k\,dt$ berechnet, so gilt:

$$(1)\quad \frac{d^n f}{dt^n} = \frac{\partial^n f}{\partial u^n} h^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1} \partial v} h^{n-1} k + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial v^n} k^n,$$

wobei links f als Function von t allein gilt, während rechter Hand f als Function von u und v partiell zu differentiiren ist.

Um die rechte Seite von (1) weiter umzugestalten, betrachte man allein x als variabel und differentiire f partiell nach x auf Grund der Regel der Differentiation der Function einer Function; es folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \text{weil} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

ist und v von x unabhängig ist.

Durch Fortsetzung der gleichen Ueberlegung findet man allgemein $\frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^{n-k}\partial y^k} = \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial u^{n-k}\partial v^k}$, und daraufhin nimmt die Gleichung (1) die neue Gestalt an:

$$\frac{d^n f(u,v)}{dt^n} = \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^n} h^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^{n-1}\partial y} h^{n-1}k + \cdots + \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial y^n} k^n.$$

In dieser für jeden Werth der Variabelen t geltenden Gleichung nehme man $t = 0$, wobei $u = x$ und $v = y$ wird:

$$(2)\quad \left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t=0} = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} h^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-1}\partial y} h^{n-1}k + \cdots + \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} k^n,$$

eine Gleichung, auf deren linker Seite erst nach Ausführung der n-maligen Differentiation $t = 0$ zu setzen ist.

Nun entwickele man andererseits $f(u,v)$ als Function von t nach VII, 8 in die Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(u,v) = f(x,y) + \left(\frac{df(u,v)}{dt}\right)_{t=0}\cdot\frac{t}{1} + \left(\frac{d^2 f(u,v)}{dt^2}\right)_{t=0}\cdot\frac{t^2}{1.2} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{d^{n-1} f(u,v)}{dt^{n-1}}\right)_{t=0}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Für das Restglied R_n findet man nach Formel (2) in VII, 8:

$$R_n = \frac{t^n}{n!}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{\substack{u = x + h\vartheta t \\ v = y + k\vartheta t}},$$

wo ϑ eine dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörende Zahl ist.

Hier ersetze man die einzelnen Klammerausdrücke rechter Hand durch ihre in (2) berechneten Werthe, trage aber sodann $t = 1$ ein:

$$(3)\quad f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial x^{n-1}} h^{n-1} + \binom{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial x^{n-2}\partial y} h^{n-2}k + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial y^{n-1}} k^{n-1}\right] + R_n.$$

Die Gültigkeitsbedingungen dieses Ergebnisses folgen aus denen der in Benutzung genommenen Mac Laurin'schen Reihe für $f(u,v)$, sowie denjenigen, welche den Entwickelungen der voraufgehenden Nummern zu Grunde liegen.

Lehrsatz: *Ist die Function $f(x,y)$ sammt ihren partiellen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung inclusive für alle hier in Betracht kommenden Werthsysteme der Argumente x und y eindeutig und stetig, so lässt sich $f(x+h, y+k)$ in Gestalt der durch (3) gegebenen „Taylor'schen Reihe“ nach Potenzen von h und k entwickeln.*

Das Restglied R_n ist direct gleich der rechten Seite der Formel (2), nur dass in den fertig berechneten partiellen n^{ten} Ableitungen die Argumente x, y zu ersetzen sind durch $x + \vartheta h$, $y + \vartheta k$.

Die Uebertragung der vorstehenden Entwickelung auf den Fall einer Function von mehr als zwei Variabelen vollzieht sich ohne Schwierigkeit. Als Anfangsglieder hat man dann:

$$(4)\quad f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} h_n^2\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} h_{n-1} h_n\right) + \cdots$$

Hier gelten überall da, wo die Function f ohne Argumente geschrieben ist, $x_1, \ldots, x_n$ als solche.

Den Uebergang zur „*Mac Laurin'schen Reihe*" für Functionen mehrerer Variabelen vollziehe man von (3) [und entsprechend von (4)] aus, indem man $x = y = 0$ setzt, hernach aber statt h und k wieder x und y schreibt.

8. Integration zweigliedriger totaler Differentialausdrücke.

Erklärung: *Sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei Functionen der von einander unabhängigen Variabelen x und y, so bezeichnet man:*

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

im Anschluss an Nr. 2 stets dann als ein „totales Differential" oder einen „totalen (vollständigen) Differentialausdruck", falls eine Function $z = f(x, y)$ existirt, für welche:

$$(1)\quad . \quad . \quad . \quad dz = df(x, y) = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

zutrifft. Diese Function $f(x, y)$ heisst alsdann ein „Integral" des Differentials $(\varphi\,dx + \psi\,dy)$.

Aus (1) würde sich vermöge (3) Nr. 2, sowie Nr. 5 ergeben:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Lehrsatz: *Die hier an dritter Stelle gewonnene Bedingung:*

$$(2)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

ist nun nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dafür, dass $(\varphi\,dx + \psi\,dy)$ ein vollständiges Differential ist.

In der That gelingt unter der Bedingung (2) die Angabe eines Integrals $f(x, y)$ auf folgendem Wege.

Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ gleich $\varphi(x, y)$ sein soll, so folgt, wenn man φ bei constant gedachtem y nach x integrirt:

$$(3)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x, y) = \int \varphi\,dx + \chi(y).$$

An Stelle der „Integrationsconstanten" ist hier die von y allein abhängende Function $\chi(y)$ zu setzen, da von derselben nur Unabhängigkeit von der „Integrationsvariabelen" x, aber nicht von y zu fordern ist.

Es fragt sich nun, ob man $\chi(y)$ so bestimmen kann, dass die durch (3) gegebene Function $f(x, y)$ das gewünschte Integral ist. Hierzu ist hinreichend und nothwendig, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit der gegebenen Function $\psi(x, y)$ identisch ist:

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \psi = \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx + \frac{d\chi(y)}{dy}, \quad \frac{d\chi(y)}{dy} = \psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx.$$

Damit die letzte Gleichung möglich ist, muss auf ihrer rechten Seite eine Function von y allein stehen. Dies ist in der That der Fall; denn die Ableitung nach x des auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Ausdrucks verschwindet zufolge (2):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\int \varphi\, dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int \varphi\, dx\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

dieser Ausdruck erweist sich somit als von x unabhängig.

Der an $\chi(y)$ gestellten Bedingung genügt somit die Function

$$(5)\quad \ldots\ldots \quad \chi(y) = \int\left[\psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx\right] dy + C,$$

wo C eine von x und y unabhängige Grösse ist.

Durch Einsetzung dieses Werthes von $\chi(y)$ in Formel (3) gewinnt man als *„Integral des totalen Differentials* $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$":

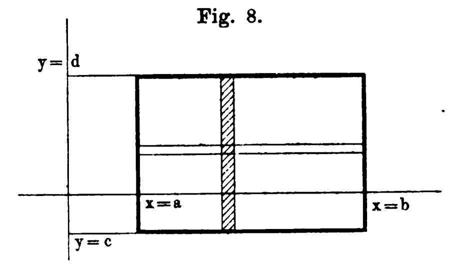
$$(6)\quad f(x, y) = \int \varphi\, dx + \int\left[\psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dy\right] dy + C,$$

eine Formel, welche in der Theorie der Differentialgleichungen zur Verwendung kommt.

9. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Man verstehe unter x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten und zeichne in der xy-Ebene das in Fig. 8 scharf umrandete Rechteck, dessen Seiten durch die vier Gleichungen $x = a$ und $x = b$, $y = c$ und $y = d$ dargestellt sind.

Fig. 8.



Es sei $z = \varphi(x, y)$ eine „elementare" Function der Variabelen x, y, welche für alle vom Inneren und vom Rande des Rechtecks gelieferten Werthsysteme x, y eindeutig und stetig ist.

Das Volumen desjenigen Raumtheiles, welcher durch die vier „Ebenen“ $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, durch die xy-Ebene, sowie durch die „Fläche“ $z = \varphi(x, y)$ eingegrenzt wird, heisse V[1]).

Zur Bestimmung von V zerlege man das Rechteck durch zwei Systeme von Geraden, die zur x-Axe bezw. y-Axe parallel laufen, in unendlich kleine Rechtecke. Das einzelne dieser Rechtecke, dessen Flächeninhalt (cf. Fig. 8) gleich $dx\,dy$ ist, liefert für das Volumen V ein Prisma vom Rauminhalt $z\,dx\,dy$.

Man lege nun zunächst bei constantem x und dx alle unendlich kleinen Rechtecke an einander, die den in Fig. 8 schraffirten Streifen erfüllen. Letzterer liefert vom Volumen V eine Scheibe des Inhaltes:

$$\left(\int_c^d z\,dy\right)dx = \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx,$$

wobei für constantes x und dx nach y zu integriren ist.

Indem wir den auszumessenden Raum aus unendlich vielen Scheiben dieser Art aufbauen, ergiebt sich:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx.$$

Man kann jedoch auch so verfahren, dass man den in Fig. 8 nicht schraffirten, zur x-Axe parallel laufenden Streifen zunächst aus unendlich kleinen Rechtecken aufbaut u. s. w. Für V ergiebt sich dann:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right)dy,$$

wobei für die innere Integration y als constant gilt.

Durch Gleichsetzung der beiden für V erhaltenen Werthe folgt der

Lehrsatz: *Ist $\varphi(x, y)$ eine elementare Function von x und y, welche für alle den Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ genügenden Werthsysteme der Argumente x, y eindeutig und stetig ist, so gilt die Gleichung:*

$$(3) \quad \ldots \quad \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx. \text{ —}$$

Unter Aufgabe der bisherigen geometrischen Deutung von x und y wechseln wir die Bezeichnung, indem wir p statt y schreiben, und nennen alsdann p einen in der Function φ enthaltenen sogenannten *„unbestimmten oder variabelen Parameter“*.

---

[1]) Nach Analogie der in VI, 10 bei der Quadratur ebener Curven hervorgetretenen Verhältnisse sind etwa unterhalb der xy-Ebene gelegene Theile des fraglichen Volumens bei Bestimmung der Maasszahl V *negativ* zu rechnen.

An Stelle der unteren Integralgrenze c setzen wir die *Constante* p_0, während die obere Grenze $d = p$ als *unbestimmt* oder *variabel* gelte.

Die Formel (3) lautet nun:

$$(4) \quad . \quad . \quad \int_{p_0}^{p}\left(\int_{a}^{b} \varphi(x,p)\,dx\right)dp = \int_{a}^{b}\left(\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\,dp\right)dx$$

und liefert den

Lehrsatz: *Ist φ eine Function von x mit dem Parameter p, so ist das zwischen den constanten Grenzen a und b genommene Integral des Differentials $\varphi\,dx$ eine Function von p allein. Um letztere nach p zwischen den Grenzen p_0 und p zu integriren, ist es erlaubt, die Integration nach p unter dem auf x bezogenen Integralzeichen an $\varphi(x,p)$ zu vollziehen. —*

Aus der zweiten Formel (3) in VI, 7 folgt, dass allgemein die Ableitung eines Integrals $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ mit variabeler oberer Grenze x nach dieser Grenze gleich $\varphi(x)$ ist.

Durch Differentiation nach p folgt somit aus (4):

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial}{\partial p}\int_{a}^{b}\left(\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\,dp\right)dx = \int_{a}^{b} \varphi(x,p)\,dx.$$

Nun schreibe man wegen der variabelen oberen Grenze p:

$$\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\,dp = \psi(x,p)$$

und findet durch Differentiation nach p hieraus:

$$\varphi(x,p) = \frac{\partial\psi(x,p)}{\partial p}.$$

Ersetzt man in (5) rechts und links φ durch ψ, wechselt sodann aber wieder die Bezeichnung ψ in φ aus, so ist:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial}{\partial p}\int_{a}^{b} \varphi(x,p)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{\partial\varphi(x,p)}{\partial p}\,dx.$$

Lehrsatz: *Um ein bestimmtes Integral nach einem unter dem Integralzeichen vorkommenden Parameter p zu differentiiren, ist es erlaubt, die Differentiation unter dem Integralzeichen, d. h. zuerst (vor der Integration) auszuführen.*

Zusatz: *Es gilt hier überall die Annahme, dass φ sowohl in x wie in p eine „elementare" Function ist. Ueberdies setzt der Beweis voraus, dass für alle Werthepaare von Argument und Parameter, welche innerhalb a und b bezw. innerhalb p_0 und p liegen, die Function $\varphi(x,p)$*

[für Formel (4)] resp. die Function $\varphi'_p(x,p)$ [für Formel (6)] eindeutig und stetig ist.

Beispiel: Nach der in XI, 6 befolgten Methode gewinnt man vermöge zweimaliger partieller Integration:

$$\int e^{-px} \sin x\, dx = -\frac{p \sin x + \cos x}{1 + p^2} \cdot e^{-px}.$$

Ist $p > 0$, so ist es nach VI, 8 erlaubt, die Integration von $x = 0$ bis $x = \infty$ auszudehnen, da die rechte Seite für $lim.\ x = \infty$ wegen des Exponentialfactors der Grenze 0 zustrebt:

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin x\, dx = \frac{1}{1 + p^2}.$$

Durch Integration nach p folgt für $p_0 > 0$ und $p > 0$:

$$\int_0^\infty \left(\int_{p_0}^p e^{-px}\, dp \right) \sin x\, dx = \int_{p_0}^p \frac{dp}{1 + p^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p_0 x} - e^{-px}}{x} \cdot \sin x\, dx = arc\, tg\, p - arc\, tg\, p_0,$$

wo rechts die „Hauptwerthe" der Function $arc\, tg$ gemeint sind.

Diese Formel bleibt nun, wie man leicht zeigen kann, auch für $lim.\ p_0 = 0$ richtig, und man kann alsdann überdies noch zufolge VI, 8 die Integration in Bezug auf p bis zur oberen Grenze $p = \infty$ ausdehnen; es ergiebt sich dabei:

$$(7) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

1. Die Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$.

Erklärung: *Es soll in der xy-Ebene unter der „nächsten Umgebung" oder kurz der „Umgebung" eines Punktes P der Coordinaten x, y die Fläche eines Quadrates mit dem Mittelpunkte P und mit zu den*

Axen parallelen Seiten verstanden werden, dessen Seitenlänge 2δ ist; dabei soll δ je nach Umständen grösser oder kleiner, aber stets > 0 gewählt werden. Entsprechend versteht man abstract unter der „Umgebung des Werthepaares x, y“ den Inbegriff aller Werthsysteme der Variabelen, welche von den Punkten des eben genannten Quadrates geliefert werden.

Die Umgebung von x, y wird somit von allen Werthsystemen $x + h$, $y + k$ geliefert, wenn man hier h und k alle die Bedingungen:

$$(1) \quad . \quad . \quad . -\delta < h < +\delta, \qquad -\delta < k < +\delta$$

befriedigenden Werthepaare h, k durchlaufen lässt.

Wird weiterhin ausgesagt, dass „in der Umgebung“ des Werthepaares x, y irgend etwas zutreffe, so ist gemeint, *dass sich eine derartige Umgebung fixiren lässt, von welcher die fragliche Aussage gilt.* —

Die Function $f(x,y)$ sei in der Umgebung des speciellen Werthsystems x, y sammt ihren hier zur Verwendung kommenden partiellen Ableitungen eindeutig und stetig.

Erklärung: *Man sagt, die Function $f(x, y)$ werde für das specielle Werthsystem x, y zu einem Maximum (Minimum), falls der zugehörige Functionswerth $f(x, y)$ grösser (kleiner) als „alle“ übrigen in der Umgebung von x, y eintretenden Functionswerthe ist.*

Es muss somit die etwa durch $\varDelta$ zu bezeichnende Differenz:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varDelta = f(x + h, y + k) - f(x,y),$$

falls ein Maximum (Minimum) vorliegt, für *alle* gemäss (1) gewählten Werthepaare h, k ausser $h = k = 0$ kleiner (grösser) als 0 sein.

Nun liefert die Taylor'sche Reihe (3) in XII, 7 für $n = 3$:

$$(3) \quad \varDelta = (f'_x h + f'_y k) + \tfrac{1}{2}(f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2) + R_3,$$

wobei R_3 aus vier die Factoren h^3, h^2k, hk^2, k^3 enthaltenden Gliedern zusammengesetzt erscheint.

Werden h und k (bei constantem x, y) gleichzeitig unendlich klein von erster Ordnung, so wird die erste Klammer in (3) rechter Hand, sofern nicht f'_x und f'_y zugleich verschwinden, unendlich klein von erster Ordnung und die zweite Klammer sowie R_3 werden (unter entsprechendem Vorbehalt) unendlich klein von zweiter bezw. dritter Ordnung.

Man schliesst hieraus, dass, falls nicht f'_x und f'_y zugleich verschwinden, bei genügend klein gewähltem δ das Vorzeichen von $\varDelta$ mit dem von $(f'_x h + f'_y k)$ übereinstimmt [1].

Nun genügen mit h und k auch $h' = -h$ und $k' = -k$ den Bedingungen (1); es ist aber $(f'_x h' + f'_y k') = -(f'_x h + f'_y k)$, so

---

[1]) Die Schlussweise des Textes wird man leicht ausführlicher gestalten. Ist z. B. $f'_x \gtrless 0$, so hat man für die Differenz $\varDelta$, sofern man $h \gtrless 0$ und $k = hl$ setzt, die Darstellung $\varDelta = h[f'_x + l f'_y + \eta]$, wo η eine Zahl ist, die mit h die Grenze 0 hat, u. s. w.

dass Δ nur dann in der Umgebung von x, y von einerlei Zeichen sein kann, *wenn* f'_x *und* f'_y *zugleich verschwinden.*

Trifft diese Bedingung zu, so wird das Vorzeichen von Δ in der Umgebung von x, y mit dem von:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} h k + f''_{yy} k^2$$

übereinstimmen. Hier setze man $\xi = \frac{h}{k}$ und bemerke, dass selbst bei Geltung der Bedingungen (1) die reelle Variabele ξ unbeschränkt bleibt (cf. I, 1). Der Ausdruck (4) geht dann, abgesehen von dem niemals negativen Factor k^2, über in:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad f''_{xx} \xi^2 + 2 f''_{xy} \xi + f''_{yy}.$$

Ist dieser Ausdruck für *alle* reellen Werthe ξ negativ (positiv), wobei für $\xi = \infty$ (dem Werthe $k = 0$ entsprechend) das Vorzeichen durch f''_{xx} geliefert wird, so liegt wirklich ein Maximum (Minimum) vor. Dagegen ist letzteres nicht der Fall, wenn der Ausdruck (5) für reelle ξ theils positive theils negative Zahlwerthe annimmt.

Da der Ausdruck (5) eine *stetige* Function von ξ darstellt, so folgt hieraus, dass ein Maximum oder Minimum vorliegt, falls die durch Nullsetzen des Ausdruckes (5) entspringende quadratische Gleichung für ξ imaginäre Wurzeln hat, dass indess weder Maximum noch Minimum eintritt, wenn diese Gleichung reelle und verschiedene Wurzeln besitzt.

Lehrsatz: *Soll die Function $f(x, y)$ für das specielle Werthepaar x, y zu einem Maximum oder Minimum werden, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:*

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0,$$

deren Auflösung nach x, y somit alle möglicher Weise hier in Betracht kommenden Werthepaare x, y kennen lehrt. Ist für das einzelne Paar x, y weiter:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0,$$

so tritt ein Maximum (Minimum) der Function $f(x, y)$ ein, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{d x^2} < 0$ oder > 0 ist. Gilt dagegen für das fragliche Paar x, y:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{d y^2} > 0,$$

so tritt bei diesem Paar x, y weder ein Maximum noch ein Minimum ein.

Ist $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 0$, ohne dass $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ zugleich verschwinden, so erfährt der Ausdruck (5) zwar keinen Zeichenwechsel, verschwindet jedoch für einen Werth ξ. Für diesen Werth sind dann zur Zeichendiscussion von Δ die höheren Glieder der Taylor'schen Reihe heranzuziehen.

Auf letztere ist auch in dem Falle zurückzugehen, dass $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ zugleich verschwinden.

2. Geometrische Deutung der Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$.

In XIV, 3 wird gezeigt, dass die „Tangentialebene" der durch $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche für den Berührungspunkt von den Coordinaten x, y, z dargestellt ist durch:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta - z = (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

unter ξ, η, ζ variabele Coordinaten für die Punkte dieser Ebene verstanden.

Denkt man die z-Axe des Coordinatensystems vertical gerichtet, so liefern die Formeln (6) Nr. 1 den

Lehrsatz: *Wird die Function $z = f(x, y)$ für das Werthepaar x, y zu einem Maximum oder Minimum z, so hat die durch $z = f(x, y)$ dargestellte Fläche im Punkte x, y, z eine „horizontale" Tangentialebene $\zeta = z$.*

Man verstehe nunmehr unter X, Y, Z die Coordinaten derjenigen Punkte der Fläche, welche in nächster Nähe des in Rede stehenden Berührungspunktes x, y, z liegen. Dann hat man zu setzen:

$$(2) \qquad X = x + dx, \qquad Y = y + dy, \qquad Z = z + dz,$$

und es sind hierbei dx, dy, dz an einander gebunden durch:

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y),$$

eine Gleichung, die sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) Nr. 1 vermöge der Taylor'schen Reihe entwickelt in:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dz = f''_{xx}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yy}\,dy^2.$$

Schneidet man die Fläche mit einer zur Tangentialebene parallelen und ihr unendlich nahe gelegenen Ebene, so entspringt dabei eine Schnittcurve, die man als die *„Indicatrix"* des Berührungspunktes x, y, z bezeichnet.

Die Gestalt der Indicatrix in nächster Nähe des Berührungspunktes bestimmt man aus (3), indem man daselbst $dz = \varepsilon$ constant denkt und für dx, dy nach (2) die Differenzen $(X - x)$, $(Y - y)$ einträgt. Es ergiebt sich:

$$(4) \quad f''_{xx}.(X - x)^2 + 2f''_{xy}(X - x)(Y - y) + f''_{yy}(Y - y)^2 = \varepsilon,$$

eine Gleichung, die (in X, Y gedeutet) eine *Ellipse*[1]), *Hyperbel oder Parabel* darstellt, je nachdem:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} < 0, \qquad > 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist.}$$

---

[1]) Sofern man das Vorzeichen von $dz = \varepsilon$ richtig wählt.

Indem man den Begriff der Indicatrix für beliebige Punkte einer Fläche verallgemeinert, hat man folgende

Erklärung: *Der einzelne Punkt der Fläche wird als ein „elliptischer", „hyperbolischer" oder „parabolischer" (Punkt elliptischer u. s. w. Krümmung) bezeichnet, je nachdem seine Indicatrix dicht am Berührungspunkte die Gestalt einer Ellipse bezw. Hyperbel oder Parabel hat.*

Alle Punkte eines *Ellipsoids* sind elliptische Punkte, und alle Punkte eines *einschaligen Hyperboloids* sind Punkte hyperbolischer (oder sattelförmiger) Krümmung.

Die geometrische Deutung der Entwickelung in Nr. 1 läuft nun einfach hinaus auf folgenden

Lehrsatz: *Im Falle eines Maximums oder Minimums, d. h. wenn (7) Nr. 1 gilt, liegt ein „elliptischer" Punkt der Fläche vor; gilt indess die Ungleichung (8), welche weder Maximum noch Minimum zur Folge hat, so handelt es sich um einen Punkt „hyperbolischer" Krümmung.*

Auch die directe Anschauung lehrt, dass zwar ein elliptischer, aber kein hyperbolischer Punkt mit horizontaler Tangentialebene den Charakter eines „höchsten" oder „tiefsten" Punktes der Fläche hat.

3. Die Maxima und Minima einer Function von mehr als zwei Variabelen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einander unabhängige reelle Variabelen.

Erklärung: *Unter der „Umgebung" des speciellen Werthsystems* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *versteht man alle etwa durch* $x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n$ *zu bezeichnenden Werthsysteme, bei denen die sämmtlichen Beträge* h_k *der Ungleichung:*

$$(1) \qquad \ldots\ldots \quad -\delta < h_k < +\delta$$

genügen; hierbei ist δ *in demselben Sinne wie in Nr. 1 gebraucht.*

Es sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine elementare Function der n Variabelen, welche für alle in Betracht kommenden Werthsysteme der Argumente sammt ihren höheren Ableitungen, soweit diese gebraucht werden, eindeutig und stetig ist.

Erklärung: *Man sagt, die Function* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *werde für das specielle System* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zu einem Maximum (Minimum), falls der Werth der Function für das System* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *grösser (kleiner) als für „alle" übrigen Werthsysteme in der Umgebung von* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ist.*

Im Falle eines Maximums (Minimums) wird somit die Differenz:

$$(2) \qquad \Delta = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

für *alle* in Uebereinstimmung mit (1) gewählten Werthsysteme $h_1, \ldots, h_n$ ausser $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ kleiner (grösser) als 0 sein müssen.

Die Verwerthung der Taylor'schen Reihe für die Discussion dieses Ansatzes vollzieht sich genau so wie im Falle $n = 2$; man gewinnt den

Lehrsatz: *Soll die Function $f(x_1, .., x_n)$ für $x_1, \ldots, x_n$ zu einem Maximum oder Minimum werden, so müssen die n Gleichungen gelten:*

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

deren Auflösung nach $x_1, \ldots, x_n$ somit die hier möglicher Weise in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1, \ldots, x_n$ kennen lehrt. Es wird dann ein Maximum (Minimum) vorliegen, wenn:

$$(4) \quad f''_{x_1 x_1} h_1^2 + \cdots + f''_{x_n x_n} h_n^2 + 2 f''_{x_1 x_2} h_1 h_2 + \cdots + 2 f''_{x_{n-1} x_n} h_{n-1} h_n$$

für „alle" Werthsysteme der h ausser $h_1 = \cdots = h_n = 0$ kleiner (grösser) als 0 ist; und es liegt sicher kein Maximum oder Minimum vor, falls der Ausdruck (4) sowohl < 0 als > 0 werden kann.

Der Fall, dass der Ausdruck (4) zwar keinen Zeichenwechsel erfährt, aber für eines oder mehrere zulässige Werthsysteme der h verschwindet, erfordert Heranziehung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe, und die gleiche Maassregel ist nöthig, falls die sämmtlichen Ableitungen zweiter Ordnung von f für das fragliche Werthsystem $x_1, \ldots, x_n$ zugleich verschwinden sollten. —

Eine Weiterentwickelung soll hier nur für $n = 3$ gegeben werden, wo wir $h_1 = \xi h_3$, $h_2 = \eta h_3$ schreiben wollen, um alsdann ξ und η als „unbeschränkte" reelle Veränderliche anzusehen.

Der Ausdruck (4) geht, abgesehen von dem niemals negativen Factor h_3^2, über in:

$$(5) \quad f''_{x_1 x_1} \xi^2 + 2 f''_{x_1 x_2} \xi \eta + f''_{x_2 x_2} \eta^2 + 2 f''_{x_1 x_3} \xi + 2 f''_{x_2 x_3} \eta + f''_{x_3 x_3}$$

und stellt somit, gleich 0 gesetzt, in ξ und η eine *Curve zweiten Grades* dar.

Hat letztere keinen reellen Punkt in der $\xi\eta$-Ebene, so liegt ein Maximum oder Minimum vor; hat man hier aber mit einem reellen Kegelschnitt zu thun, so tritt weder Maximum noch Minimum ein.

Die analytische Geometrie liefert die Mittel, den Ausdruck (5) in dieser Hinsicht näher zu untersuchen.

4. Maxima und Minima bei Angabe von Nebenbedingungen.

Es sei eine Function $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ der $(n + m)$ Variabelen $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ gegeben, zwischen denen gewisse m Relationen (Nebenbedingungen) bestehen:

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0. \end{cases}$$

Die Aufgabe, die Maxima und Minima von $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ unter diesen Bedingungen zu bestimmen, erledigen wir nur insoweit, dass wir die nun an Stelle von (3) Nr. 3 tretenden Gleichungen ansetzen.

Zu diesem Ende könnte man $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ aus (1) berechnen und in $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ eintragen. Die so zu gewinnende Function der n unabhängigen Variabelen $x_1, \ldots, x_n$ wäre dann nach Nr. 3 zu behandeln.

In vielen Fällen ist ein anderes Rechnungsverfahren zweckmässiger. Man schreibt statt $h_1, \ldots, h_{n+m}$ Differentiale $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$, welche so gewählt sein müssen, dass auch für die veränderten Argumente die Gleichungen (1) bestehen, d. h. dass die zugehörigen totalen Differentiale $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_m$ (cf. XII, 4) verschwinden:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0. \end{cases}$$

Für jedes in Uebereinstimmung hiermit gewählte Werthsystem $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$ wird nun die Gleichung:

$$(3) \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0$$

bestehen müssen, falls f für das specielle Werthsystem $x_1, \ldots, x_{n+m}$ zu einem Maximum oder Minimum werden soll.

Hält man an der Vorstellung fest, dass $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig sind, und dass $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ durch Auflösung der Gleichungen (1) in $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt sind, so werden die Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$ von einander unabhängig sein, und $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ sind durch Auflösung der Gleichungen (2) in der Gestalt:

$$(4) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \begin{cases} dx_{n+1} = \psi_{11} dx_1 + \cdots + \psi_{1n} dx_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ dx_{n+m} = \psi_{m1} dx_1 + \cdots + \psi_{mn} dx_n \end{cases}$$

mit Hülfe gewisser mn Functionen ψ der x darstellbar.

Durch Eintragung dieser Werthe in die Gleichung (3) und Anordnung nach $dx_1, \ldots, dx_n$ nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(5) \quad \chi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) dx_1 + \cdots + \chi_n(x_1, \ldots, x_{n+m}) dx_n = 0.$$

Da diese Gleichung für *jedes* System der von einander *unabhängigen* $dx_1, \ldots, dx_n$ bestehen muss, so gelten die Gleichungen:

$$(6) \quad \cdot \quad \cdot \quad \chi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0, \ldots, \chi_n(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0,$$

welche mit Hülfe der m Gleichungen (1) die gesuchten Werthsysteme $x_1, \ldots, x_{n+m}$ mit Maximal- oder Minimalwerth f zu berechnen gestatten.

Die letzte Entwickelung kann auch so gewandt werden:

Man ziehe von der Gleichung (3) die resp. mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ multiplicirten Gleichungen (2) ab:

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}}\right) dx_{n+m} = 0$$

und bestimme die Factoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ so, dass die letzten m Klammern verschwinden. Dann aber müssen auch die in den ersten n Klammern stehenden Ausdrücke einzeln gleich 0 sein, da wir an der Vorstellung unabhängiger $dx_1, \ldots, dx_n$ festhalten können.

Das Gleichungssystem (6) erscheint somit ersetzt durch:

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \; \cdots, \; \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}} = 0,$$

ein Ergebniss, welches man interpretiren kann durch folgenden

Lehrsatz: *Sollen die Maxima und Minima einer Function $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ bei Angabe der Nebenbedingungen (1) gefunden werden, so sehe man einstweilen von diesen Relationen ab und bilde den Ansatz zur Bestimmung der Maxima und Minima der Function:*

$$(9) \qquad F(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2 - \cdots - \lambda_m \varphi_m$$

unter Annahme „constanter Multiplicatoren“ λ_k und „unabhängiger“ $x_1, \ldots, x_{n+m}$. Der gewünschte Ansatz ist [in Uebereinstimmung mit (8)]:

$$(10) \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \; \cdots, \; \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert die gesuchten Systeme $x_1, \ldots, x_{n+m}$, dargestellt in den unbestimmten Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Erst nun sind diese letzteren in der Art zu fixiren, dass die fraglichen Lösungssysteme $x_1, \ldots, x_{n+m}$ die Relationen (1) erfüllen.

Diese Regel zur Bestimmung der Maxima und Minima von f heisst die „*Methode der unbestimmten Multiplicatoren*“.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Curve.

Die Entwickelung in XII, 7 liefert ein neues Mittel zur Aufstellung der Gleichungen der *Tangente* und *Normale* einer ebenen Curve C in einem ihrer Punkte P (cf. V, 1).

Die Curve C sei gegeben durch $f(x, y) = 0$, und es handle sich um Darstellung der Tangente und Normale im Punkte P der Coordinaten x, y auf C, wobei wie in V, 1 für die Coordinaten der Punkte der Tangente bezw. Normale die Bezeichnung ξ, η gebraucht werden soll.

Sind nun zunächst $\xi = x + h$, $\eta = y + k$ die Coordinaten irgend eines in der Ebene dem Punkte P unendlich nahe gelegenen Punktes, so liefert die Formel (3) in XII, 7, wenn wir auf $f(x, y) = 0$ Bedacht nehmen und höhere Potenzen und Producte von $(\xi - x)$ bez. $(\eta - y)$ neben den ersten vernachlässigen:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad f(\xi, \eta) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\eta - y).$$

Soll demnach der Punkt ξ, η auf der Tangente im Punkte P und also auf der Curve unendlich nahe bei P liegen, so ist $f(\xi, \eta) = 0$; Formel (1) liefert somit den

Lehrsatz: *Die Tangente der durch $f(x, y) = 0$ gelieferten ebenen Curve im Punkte P der Coordinaten x, y ist durch:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\eta - y) = 0$$

dargestellt; für die zugehörige Normale ergiebt sich daraufhin leicht die Gleichung:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Auf Grund der in XII, 3 für die Differentiation einer impliciten Function aufgestellten Regel leitet man aus den Gleichungen (2) und (3) sofort die in V, 1 unter (1) und (2) aufgestellten Gleichungen ab.

2. Die singulären Punkte einer ebenen Curve.

Eine ebene Curve C sei wie in Nr. 1 durch $f(x, y) = 0$ dargestellt.

Erklärung: *Trifft es sich, dass für einen Punkt P der Coordinaten x, y auf C die beiden partiellen Ableitungen f'_x und f'_y zugleich verschwinden, so heisst der Punkt P ein „singulärer Punkt" der Curve C.*

Die Gleichungen (2) und (3) für Tangente und Normale von C im Punkte P werden in diesem Falle illusorisch.

Ist $\xi = x + h$, $\eta = y + k$ das Paar der Coordinaten für einen in nächster Nähe des singulären Punktes gelegenen beliebigen Punkt der Ebene, so folgt jetzt aus Formel (3) in XII, 7 bei Vernachlässigung der Potenzen und Producte höheren als zweiten Grades von $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$:

$$(1) \quad f(\xi, \eta) = f''_{xx} \cdot (\xi - x)^2 + 2 f''_{xy} \cdot (\xi - x)(\eta - y) + f''_{yy} \cdot (\eta - y)^2.$$

Es gelte die Annahme, *dass für die Coordinaten x, y von P nicht auch noch f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} zugleich verschwinden.*

Soll alsdann der Punkt ξ, η auf C liegen, so ist:

$$f''_{xx}.(\xi - x)^2 + 2f''_{xy}.(\xi - x)(\eta - y) + f''_{yy}.(\eta - y)^2 = 0, \tag{2}$$

eine Gleichung, deren linke Seite sich in das Product zweier in ξ, η *linearen* Factoren zerlegen lässt, und die dem entsprechend *die beiden durch*

$$\left\{\begin{array}{l}(\eta - y)f''_{yy} + (\xi - x)\left(f''_{xy} + \sqrt{f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy}}\right) = 0, \\ (\eta - y)f''_{yy} + (\xi - x)\left(f''_{xy} - \sqrt{f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy}}\right) = 0\end{array}\right. \tag{3}$$

dargestellten geraden Linien liefert.

Da der Verlauf der Curve in nächster Nähe von P durch *zwei* Geraden angegeben ist, so zieht die Curve *zweimal* durch den singulären Punkt hindurch; letzterer heisst dieserhalb ein *„zweifacher Punkt"* oder ein *„Doppelpunkt"* der Curve.

Für den geometrischen Charakter des singulären Punktes hat man zu unterscheiden, ob die in (3) eintretende Quadratwurzel reell und von 0 verschieden oder gleich 0 oder endlich imaginär ist.

Erklärung: *Je nachdem die erste, zweite oder dritte Bedingung:*

$$f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} > 0, \quad = 0, \quad < 0 \tag{4}$$

zutrifft, bezeichnet man den singulären Punkt als einen „eigentlichen Doppelpunkt" (Knotenpunkt), einen „Rückkehrpunkt" (Spitze) oder einen „isolirten Punkt".

Fig. 9.

Im letzteren Falle stellen die Gleichungen (3) wegen der complexen Coëfficienten keine reelle Gerade dar; hier liegen in der Nähe des singulären Punktes keine reelle Punkte der Curve.

Den Charakter des *Knotenpunktes* versinnlicht die in Fig. 9 angedeutete Curve, welche durch die Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

dargestellt wird; der singuläre Punkt liegt bei $x = 0$, $y = 0$, und das Paar der Tangenten in diesem Punkte wird durch die Axen des Coordinatensystems geliefert.

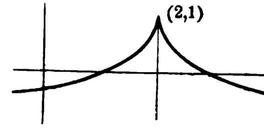


Fig. 10.

Einen bei $x = 2$, $y = 1$ gelegenen *Rückkehrpunkt* besitzt die durch:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^5 = 0$$

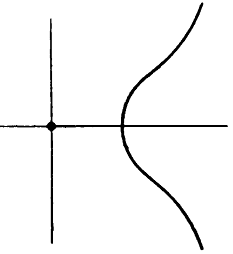
dargestellte Curve fünften Grades, deren Verlauf in Fig. 10 näher angegeben ist; für die Coordinaten des singulären Punktes ist $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = f''_{yy} = 0$.

Das Beispiel eines *isolirten Punktes* liefert die durch

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

dargestellte Curve dritter Ordnung. Man hat hier $y = \pm x \sqrt{x-1}$ und erkennt im Nullpunkte einen isolirten Punkt. Die Gestalt der Curve ist in Fig. 11 angegeben.

Fig. 11.



3. Die Tangentialebenen, Tangenten und Normalen einer krummen Fläche.

Es seien x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten, und es werde eine krumme Fläche F durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellt.

Es sei ferner P irgend ein Punkt auf F von den Coordinaten x, y, z, und ein beliebiger in nächster Nähe von P gelegener Punkt des Raumes habe die Coordinaten $\xi = x + h$, $\eta = y + k$, $\zeta = z + l$.

Da $f(x,y,z) = 0$ ist, so gilt in erster Annäherung:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z).$$

Soll somit der Punkt ξ, η, ζ in nächster Nähe von P auf der Fläche F gelegen sein, so muss er auf der in variabelen Coordinaten ξ, η, ζ durch:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (\zeta - z) = 0$$

dargestellten *Ebene* liegen.

Erklärung: *Die durch (1) in ξ, η, ζ dargestellte Ebene, welche hiernach den Verlauf der Fläche F in nächster Nähe von P angiebt, heisst die „Tangentialebene" von F mit dem Berührungspunkte P.*

Im Anschluss hieran nennen wir noch folgende

Erklärung: *Eine beliebige durch den Berührungspunkt P in der Tangentialebene laufende Gerade heisst eine „Tangente" der Fläche im Punkte P.*

Jede solche Tangente schneidet die Fläche bei P in zwei einander unendlich nahen Punkten.

Diese Betrachtung wird ungültig, wenn für den Punkt P die Ableitungen f'_x, f'_y, f'_z zugleich verschwinden; P ist dann ein „singulärer" Punkt von F, auf dessen Untersuchung wir indess nicht eingehen.

Erklärung: *Eine im Punkte P auf der Tangentialebene und also auf der Fläche F senkrecht stehende Gerade heisst „Normale" der Fläche im Punkte P.*

Auf Grund der Gleichung (1) findet man vermöge bekannter Sätze der analytischen Geometrie des Raumes den

Lehrsatz: *Die Normale der durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellten Fläche im Punkte P der Coordinaten x, y, z hat die Gleichungen:*

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\xi - x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

4. Die Tangenten, Normalebenen u. s. w. einer Raumcurve.

Es mögen x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten sein, und es sollen *zwei* krumme Flächen durch die Gleichungen gegeben sein:

$$(1) \quad \ldots \quad f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Falls beide Flächen nicht gänzlich getrennt von einander verlaufen, so schneiden sie sich in einer sogenannten *„Raumcurve"*, *welche man als durch das Gleichungenpaar (1) dargestellt ansieht.*

Auf eine andere Art lässt sich die Raumcurve in der Weise darstellen, *dass man die Coordinaten x, y, z für die einzelnen Punkte der Curve als Functionen:*

$$(2) \quad \ldots \quad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t)$$

einer vierten, als unabhängig anzusehenden Variabelen t ansetzt. Zu jedem Punkte der Curve gehört dann ein bestimmter Werth der reellen Variabelen t.

Die Raumcurve heisse kurz C, und es seien P und P_1 zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte auf C; P habe die Coordinaten x, y, z und P_1 entsprechend $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$.

Das zwischen P und P_1 gelegene Stück von C heisse *„Bogendifferential"* oder *„Bogenelement"* der Raumcurve und werde durch ds bezeichnet.

Die Richtungsunterschiede des von P nach P_1 gerichteten Elementes ds gegen die positiven Richtungen der Coordinatenaxen sind die *„Richtungswinkel"* α, β, γ von ds.

Die Projectionen von ds auf die Axen sind dx, dy, dz:

$$(3) \quad \ldots \quad dx = ds \,.\, \cos\alpha, \quad dy = ds \,.\, \cos\beta, \quad dz = ds \,.\, \cos\gamma.$$

Unter Benutzung bekannter Formeln der analytischen Geometrie des Raumes folgt der

Lehrsatz: *Für das Bogendifferential ds einer Raumcurve und die zugehörigen „Richtungscosinus" gelten die Ansätze:*

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$(5) \quad \ldots \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Zur Ausführung dieser Ansätze bemerke man, dass die Punkte P und P_1 auf jeder der beiden durch die Gleichungen (1) dargestellten Flächen liegen.

Es ergiebt sich hieraus, dass die zu vorstehenden dx, dy, dz gehörenden totalen Differentiale df und dg der auf den linken Seiten der Gleichungen (1) stehenden Functionen verschwinden (cf. XII, 4):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0, \\ g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = 0. \end{aligned} \right.$$

Für die Verhältnisse der dx, dy, dz berechnet sich hieraus:

$$(7) \quad dx : dy : dz = (f'_y g'_z - f'_z g'_y) : (f'_z g'_x - f'_x g'_z) : (f'_x g'_y - f'_y g'_x).$$

Durch Einsetzung in (4) und (5) lassen sich daraufhin die Richtungscosinus des Elementes ds vermittelst der partiellen Ableitungen von f und g in den Coordinaten von P darstellen.

Bevorzugt man die Darstellung (2) von C, so mögen zu P und P_1 die Werthe t und $(t + dt)$ der unabhängigen Variabelen gehören. Die Gleichungen (2) liefern nun unmittelbar:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt, \quad dz = \chi'(t)d, \\ & ds = \pm\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt, \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right.$$

Erklärung: *Die durch P und den „consecutiven" Punkt P_1 hindurchziehende Gerade heisst „Tangente" der Raumcurve im Punkte P; die zur Tangente und also zur Curve im Punkte P senkrecht verlaufende Ebene heisst „Normalebene" der Curve C im Punkte P.*

Indem wir uns auf die soeben gemachten Angaben über Berechnung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ berufen, haben wir den

Lehrsatz: *Die Tangente der Raumcurve C im Punkte P ist darstellbar durch:*

$$(9) \quad \frac{\xi - x}{f'_y g'_z - f'_z g'_y} = \frac{\eta - y}{f'_z g'_x - f'_x g'_z} = \frac{\zeta - z}{f'_x g'_y - f'_y g'_x},$$

die Normalebene aber durch

$$(10) \quad (\xi - x)(f'_y g'_z - f'_z g'_y) + (\eta - y)(f'_z g'_x - f'_x g'_z) + (\zeta - z)(f'_x g'_y - f'_y g'_x) = 0.$$

Von der Discussion „singulärer" Punkte, für welche die auf der rechten Seite der Proportion (7) stehenden drei Glieder zugleich verschwinden, soll hier abgesehen werden.

Erklärung: *Durch „drei consecutive" Punkte P, P_1, P_2 von C lässt sich im Allgemeinen nur „eine" Ebene legen, welche man als „Schmiegungsebene" der Raumcurve im Punkte P bezeichnet. Die Schnittgerade der Schmiegungsebene und Normalebene heisst die „Hauptnormale" von C im Punkte P. Auf ihr liegt das zu P gehörende „Krümmungscentrum" der Raumcurve, d. i. das Centrum des durch P, P_1, P_2 hindurchzulegenden sogen. „Krümmungskreises".*

Es soll hier nur die Gleichung der Schmiegungsebene unter Benutzung der Darstellung (2) von C angegeben werden.

Mögen zu P, P_1, P_2 die Werthe t, $t + dt$, $t + 2dt$ der unabhängigen Variabelen gehören.

Da die Schmiegungsebene durch P hindurchläuft, so können wir ihre Gleichung mit Hülfe variabeler Coordinaten ξ, η, ζ in die Gestalt setzen:

$$(11) \quad . \; . \; a[\xi - \varphi(t)] + b[\eta - \psi(t)] + c[\zeta - \chi(t)] = 0.$$

Die a, b, c sind so zu bestimmen, dass (11) durch die Coordinaten ξ, η, ζ sowohl von P_1 wie P_2 befriedigt wird:

$$a[\varphi(t+dt) - \varphi(t)] + b[\psi(t+dt) - \psi(t)] + c[\chi(t+dt) - \chi(t)] = 0,$$
$$a[\varphi(t+2dt) - \varphi(t)] + b[\psi(t+2dt) - \psi(t)] + c[\chi(t+2dt) - \chi(t)] = 0.$$

Indem man einerseits die erste Gleichung durch dt theilt, andererseits aber die erste von der zweiten Gleichung abzieht und hernach durch dt theilt, folgt:

$$(12) \quad \begin{cases} a\varphi'(t) + b\psi'(t) + c\chi'(t) = 0, \\ a\varphi'(t+dt) + b\psi'(t+dt) + c\chi'(t+dt) = 0. \end{cases}$$

Durch Wiederholung der letzten Operation folgt aus (12):

$$(13) \quad . \; . \; . \; . \; a\varphi''(t) + b\psi''(t) + c\chi''(t) = 0,$$

eine Gleichung, welche im Verein mit der ersten Gleichung (12) die Verhältnisse der a, b, c zu berechnen erlaubt.

Lehrsatz: *Die Gleichung der Schmiegungsebene der durch (2) dargestellten Raumcurve in dem zum Werthe t gehörenden Punkte P ist die folgende:*

$$(14) \quad (\xi - \varphi)(\psi'\chi'' - \psi''\chi') + (\eta - \psi)(\chi'\varphi'' - \chi''\varphi') + (\zeta - \chi)(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi') = 0.$$

Hier ist bei φ, φ', ... das Argument t allenthalben der Kürze halber fortgelassen.

5. Curvenschaaren und deren einhüllende Curven.

Man denke die z-Axe der rechtwinkligen Raumcoordinaten vertical gerichtet.

Die durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Fläche F werde mit der durch $z = p$ gegebenen Horizontalebene zum Schnitt gebracht.

Die Schnittcurve projicire man auf die xy-Ebene, sie ist hier durch die Gleichung $f(x, y, p) = 0$ dargestellt, welche man für jenes constante p in x und y als variabelen Coordinaten zu deuten hat.

Indem man jetzt diese Operation für alle möglichen reellen Werthe p durchgeführt denkt, gewinnt man als Projection aller „Horizontalschnitte" der Fläche F auf die xy-Ebene eine *„Schaar ebener Curven"* oder kurz eine *„Curvenschaar"*. Diese Curvenschaar erscheint dargestellt durch die Gleichung:

(1) . . . . $f(x, y, p) = 0,$

in welcher man p als einen sogen. „*variabelen Parameter*“ bezeichnet.

Die Curvenschaar kann man auch direct durch die Gleichung (1) definiren; es gehört dann zu jedem reellen Werth des Parameters p die durch (1) gegebene Curve, und alle diese unendlich vielen Curven liefern die fragliche Schaar.

Wir unterscheiden nun *zwei* Arten von Curvenschaaren, *je nachdem die Fläche F vertical laufende Tangentialebenen und damit verticale Tangenten hat oder nicht.*

Ein Beispiel für den *letzteren* Fall wird geliefert durch:

(2) . . . . $x^2 + y^2 - p^2 = 0.$

Man hat es hier mit der Schaar aller concentrischen Kreise um den Nullpunkt zu thun, und die Fläche F stellt einen geraden Kreiskegel mit der z-Axe als Axe dar.

Im *ersteren* Falle besitzt die Curvenschaar eine sogen. „*einhüllende Curve*“ oder „*Enveloppe*“; es gilt nämlich folgende

Erklärung: *Die Gesammtheit der Schnittpunkte aller vertical laufenden Tangenten von F mit der xy-Ebene liefert die zur Schaar (1) gehörende einhüllende Curve (Enveloppe).*

Die einzelne dieser Tangenten schneidet F in zwei „consecutiven“ Punkten, die ihrerseits vertical über einander auf zwei „consecutiven“ Horizontalschnitten von F liegen.

Der Fusspunkt der Tangente in der xy-Ebene ist sonach Schnittpunkt zweier „consecutiven“ Curven der Schaar.

Durch Umkehrung dieser Ueberlegung entspringt der

Lehrsatz: *Man kann die Enveloppe der Schaar (1) als Inbegriff aller Punkte definiren, in denen sich je zwei consecutive Curven der Schaar (1) durchschneiden.*

Ein Punkt der Coordinaten x, y, z auf F hat nun stets und nur dann eine verticale Tangentialebene, wenn $f'_z = 0$ für diese Coordinaten erfüllt ist (cf. Formel (1) in Nr. 3).

Die Gesammtheit der Berührungspunkte mit verticaler Tangente bildet somit die durch:

(3) . . . . $f(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 0$

dargestellte Raumcurve [1]).

Durch Elimination von z findet man die Gleichung der Projection dieser Curve auf die xy-Ebene.

Lehrsatz: *Die Gleichung der einhüllenden Curve der durch (1)*

---

[1]) Für die senkrechte Projection der Fläche F auf die xy-Ebene wird die fragliche Curve die sogen. „Umrisscurve“ der Fläche.

dargestellten Curvenschaar findet man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x,y,p) = 0, \qquad \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0.$$

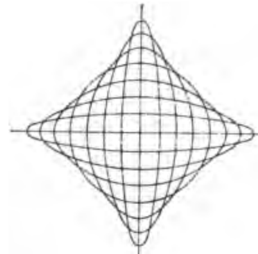
Die geometrische Bedeutung der einhüllenden Curve oder Enveloppe einer Schaar und die Berechtigung der Benennung „einhüllende Curve“ werde durch folgendes Beispiel aufgewiesen.

Die Schaar aller Ellipsen, für welche die Summe der Halbaxen gleich der Constanten a ist, wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a-p)^2 x^2 + p^2 y^2 - p^2 (a-p)^2 = 0.$$

Wie Fig. 12 zeigt, bedeckt diese Schaar ein Stück der Ebene, welches rings von einer aus vier congruenten Stücken bestehenden und mit vier Spitzen versehenen Curve „eingehüllt“ ist.

Fig. 12.



Eben diese Curve ist die Enveloppe der Schaar (5), und man veranschauliche sich, dass sich hier in der That die einzelnen Punkte der Enveloppe als Schnittpunkte consecutiver Curven der Schaar auffassen lassen.

Die zweite Gleichung (4) wird, vom Factor 2 abgesehen:

$$(6) \quad (p - a' x^2 + p y^2 + p(a-p)(2p-a) = 0.$$

Die Elimination von p aus (5) und (6) liefert als Gleichung der Enveloppe:

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Die Enveloppe ist die als „*Astroide*“ benannte Curve.

6. Cubatur der Volumina.

Unter Beibehaltung des bisherigen Coordinatensystems legen wir die Gleichung $z = f(x,y)$ vor und deuten dieselbe wie bisher als eine krumme Fläche F.

In der xy-Ebene möge durch $g(x,y) = 0$ eine geschlossene Curve C dargestellt sein; und es gelte die Voraussetzung, dass für alle Punkte x, y des von C umrandeten Stückes der xy-Ebene die Function $z = f(x,y)$ eindeutig und stetig sei.

Man denke über der Curve C als Grundriss einen Cylinder mit zur z-Axe parallelen Seiten errichtet.

Es sei alsdann durch V' das Volumen des- oder derjenigen Raumstücke bezeichnet, *welche seitlich durch den Mantel des Cylinders, oberhalb und unterhalb aber durch die im Inneren des Cylinders verlaufenden*

Theile der Fläche F und der xy-Ebene eingegrenzt werden. Die Maasszahl für das Volumen eines einzelnen Raumstücks soll hierbei positiv oder negativ in Rechnung gestellt werden, je nachdem dieses Stück oberhalb und unterhalb der xy-Ebene liegt.

Um das Volumen V' in Gestalt eines sogen. „*Doppelintegrales*“ auszudrücken, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Nullpunkt innerhalb des durch die Curve C umschlossenen Flächenstückes liegt. Letzteres wird dann durch die Axen in vier Quadranten zerlegt, und wir können uns auf die Betrachtung des ersten in Fig. 13 stark umrandeten Quadranten beschränken.

Die Curve C schneide die positive x-Axe bei $x = a$ und die positive y-Axe bei $y = b$. Es gelte die Annahme, dass das den bevorzugten Quadranten begrenzende Stück von C für jede Abscisse x zwischen 0 und a stets nur *eine* zugehörige Ordinate $y = \varphi(x)$ liefere [1]).

Fig. 13.

Wir bezeichnen mit V das Volumen des über dem ausgewählten Quadranten gelegenen Theiles des oben eingegrenzten Raumstückes vom Volumen V'.

Zur Bestimmung von V zerlege man die in der xy-Ebene gelegene Grundfläche des fraglichen Raumtheiles durch Parallele zu den Axen in unendlich kleine Rechtecke, wobei der Flächeninhalt eines einzelnen Rechtecks gleich $dx\,dy$ sein wird.

Ueber dem einzelnen Rechtecke steht alsdann vom Volumen V ein vierseitiges Prisma des Volumeninhaltes $z\,dx\,dy = f(x, y)\,dx\,dy$.

Bei constantem x und dx bilde man nun durch Integration nach y zwischen den Grenzen 0 und $\varphi(x)$ den Inhalt derjenigen Scheibe des auszumessenden Raumtheiles, welche oberhalb des in Fig. 13 schraffirten Streifens liegt.

Die Integration nach x zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ vollendet die Bestimmung von V.

Statt zuerst nach y zu integriren, kann man auch mit der Integration nach x beginnen; hierbei möge $x = \psi(y)$ die zu y gehörende Abscisse von C sein.

Lehrsatz: *Das oben ausführlich beschriebene Volumen V kann durch Auswerthung jedes der beiden Doppelintegrale:*

---

[1]) Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muss man das von C umrandete Flächenstück in mehrere Theile zerlegen und letztere einzeln behandeln.

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_0^a \left(\int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_0^b \left(\int_0^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

bestimmt werden.

Bei Ausführung des inneren Integrals in (1) bezw. (2) gilt x bezw. y als constant.

Die hiermit geleistete Bestimmung des Cubikinhaltes vom fraglichen Volumen bezeichnet man als „*Cubatur*" desselben.

Als Beispiel diene die Bestimmung des Volumens eines dreiaxigen Ellipsoides, das gegeben ist durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der Ansatz (1) liefert den Rauminhalt eines Octanten des Ellipsoides, wenn wir hier eintragen:

$$f(x,y) = \frac{c}{b} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}, \quad \varphi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Man hat somit:

$$(3) \quad \ldots \quad V = \frac{c}{b} \int_0^a \left[dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy \right].$$

Für das innere Integral hat man nach XI, 4:

$$\int \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy = {}^1\!/_2\, y \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} + \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Durch Eintragung der Grenzen für y folgt:

$$(4) \quad \ldots \quad V = \frac{\pi b c}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi a b c}{6}.$$

Das Gesammtvolumen des Ellipsoides ist somit ${}^4\!/_3\, \pi a b c$.

7. Complanation der krummen Flächen.

Vermöge der Doppelintegrale kann man auch die Bestimmung des Flächeninhaltes von Theilen der Fläche F, die sogen. „*Complanation*" der Fläche F, durchführen.

Es sollen hier alle Voraussetzungen und Bezeichnungen von Nr. 6 beibehalten werden; und es liege die Aufgabe vor, *den Inhalt S desjenigen Stückes der Fläche F zu bestimmen, welches oberhalb bezw. unterhalb des in Fig. 13 stark umrandeten Theiles der xy-Ebene liegt.*

Letzteres Stück der xy-Ebene wurde oben in unendlich kleine Rechtecke eingetheilt.

Ueber bezw. unter einem einzelnen solchen Rechtecke, dessen Inhalt $dx\,dy$ ist, liege das Element dS der krummen Fläche F.

Man darf das Element dS als eben ansehen, und man nenne den Neigungswinkel des Elementes gegen die xy-Ebene γ, so dass man die Gleichung $dS . \cos\gamma = dx\,dy$ gewinnt.

Da γ gleich dem Winkel zwischen der auf dS errichteten Normale und der z-Axe ist, so findet man nach Nr. 3 unter Zugrundelegung der Gleichung $z - f(x, y) = 0$ der krummen Fläche:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Es ergiebt sich hieraus der

Lehrsatz: *Das oben näher bezeichnete Stück der Fläche F hat den Flächeninhalt:*

$$(1) \quad . \quad . \quad S = \int_0^a \left[\int_0^{\varphi(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dy\right] dx;$$

man kann den Flächeninhalt S aber auch ausdrücken durch:

$$(2) \quad . \quad . \quad S = \int_0^b \left[\int_0^{\psi(y)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\right] dy.$$

Als Beispiel diene die Complanation der Kugel des Radius r um den Nullpunkt. Zur Bestimmung der Oberfläche S des Kugeloctanten hat man zu setzen:

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \qquad \varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Bei Benutzung von (1) gilt also der Ansatz:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S = r \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right) dx.$$

Nun ist nach Formel (12) in XI, 4:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Durch Eintragung der Grenzen erhält man aus (3):

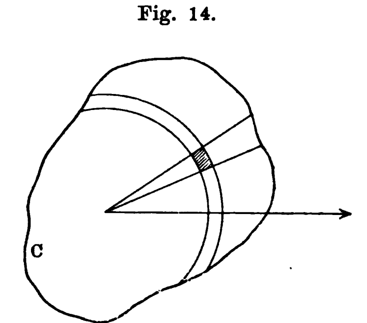
$$S = \frac{\pi r}{2} \int_0^r dx = {}^1/_2\, \pi r^2.$$

8. Gebrauch der Polarcoordinaten.

Will man in der xy-Ebene an Stelle der x, y Polarcoordinaten r, ϑ gebrauchen, so wähle man den Nullpunkt als Pol und die positive x-Axe als Axe der Polarcoordinaten.

Möge eine den Pol umziehende, geschlossene Curve C durch $r = \varphi(\vartheta)$ gegeben sein, wobei $\varphi(\vartheta)$ eine eindeutige Function sei; und möge durch die im Inneren von C eindeutige Function $z = f(r, \vartheta)$ eine krumme Fläche F gegeben sein.

Fig. 14.



Zur Cubatur und Complanation von F errichten wir über C einen Cylinder, dessen Seiten zur z-Axe parallel sind, und definiren das Volumen V und die Oberfläche S analog wie in Nr. 6 und 7.

Das in Fig. 14 schraffirte Element der $r\vartheta$-Ebene hat den Flächeninhalt $r\,dr\,d\vartheta$.

Man beweist daraufhin leicht folgenden

Lehrsatz: *Das von dem zu C gehörenden Cylinder, der $r\vartheta$-Ebene und der Fläche F eingegrenzte Volumen V ist:*

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\varphi(\vartheta)} f(r, \vartheta)\, r\,dr\right) d\vartheta,$$

und entsprechend gilt für die Oberfläche S:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad S = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\varphi(\vartheta)} \frac{r\,dr}{\cos\gamma}\right) d\vartheta,$$

wobei γ in derselben Bedeutung, wie in Nr. 7 gebraucht ist.

9. Betrachtung weiterer Beispiele zur Cubatur und Complanation.

1. Die in der xz-Ebene durch $z = e^{-x^2}$ dargestellte Curve hat den in Fig. 15 skizzirten Verlauf und nähert sich von oben her beiderseits asymptotisch der x-Axe.

Durch Rotation dieser Curve um die z-Axe entspringt eine glockenförmig gestaltete Oberfläche F, welche durch $z = e^{-r^2}$ dargestellt ist.

Der zwischen F und der $r\vartheta$-Ebene gelegene Raum hat, obschon er sich nach allen Richtungen der $r\vartheta$-Ebene ins Unendliche zieht, einen endlichen Inhalt V:

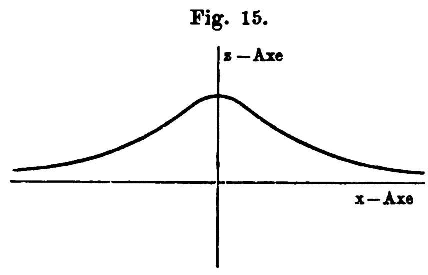
$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\,dr\right) d\vartheta.$$

Da nämlich das innere Integral ϑ nicht mehr enthält, so kann man dasselbe vor das auf ϑ bezogene Integral setzen:

$$V = \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right).$$

Jedes dieser beiden Integrale ist leicht zu bestimmen, und man findet $V = \pi$.

Fig. 15.



2. Wendet man bei der eben behandelten Aufgabe rechtwinklige Coordinaten x, y an, so hat man nach Nr. 6:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx.$$

Spaltet man $e^{-x^2-y^2}$ in das Product von e^{-x^2} und e^{-y^2}, und setzt man den ersten Factor, als von y unabhängig, vor das Integral in Bezug auf y, so folgt:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx.$$

Nun ist das innere Integral von x unabhängig; es ist somit:

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Der Vergleich mit dem Ergebniss in 1. liefert den

Lehrsatz: *Das zwischen den Grenzen* $-\infty$ *und* $+\infty$ *ausgeführte Integral des Differentials* $e^{-x^2}dx$ *ist gleich* $\sqrt{\pi}$:

$$(1) \quad \ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Durch $y = x\,tg\,z$ ist eine sogen. Schraubenfläche F dargestellt, deren Axe die z-Axe ist.

Als Curve C soll der Kreis $r = 1$ gewählt werden, und es werde die Complanation für einen Quadranten der Fläche F ausgeführt.

Da man hier die Gleichung $z - arc\,tg\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ hat, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Man hat also zufolge (2) Nr 8:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr\right) d\vartheta = \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\right).$$

Durch Ausführung der letzten Integrale gewinnt man:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad S = \frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

Zusätze zum ersten Heft.

Seite 40, Zeile 24 ist hinter den Worten „bei diesem Uebergange" einzuschalten „in den elementaren Fällen".

Seite 48, Zeile 18 ist hinter den Worten „Zahlen m" einzuschalten „ausser $m = -1$".

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-
RECHNUNG

DRITTER THEIL



HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

DRITTER THEIL

MIT 9 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1897

VORWORT.

Mit dem gegenwärtigen dritten Heftchen kommt der Leitfaden zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung zum Abschluss. Der hier in seinen Grundzügen entwickelte Stoff entspricht der Vorlesung, welche an der hiesigen Hochschule im dritten Studiensemester den Studirenden des Ingenieurbauwesens und des Maschinenbaues dargeboten wird.

Uebrigens ist es mir nicht jedesmal gelungen, die Vorlesung in dem hier skizzirten Umfange vollständig zu erschöpfen; denn die Besprechung der Beispiele (welche der Leitfaden nicht giebt) erfordert bei dieser Vorlesung den grösseren Theil der Zeit. So wolle man die Darstellung in ihrem letzten Theile nur mehr als die obere Grenze dessen ansehen, was in der genannten Vorlesung hierselbst entwickelt wird.

Es wird hoffentlich keinerlei Bedenken erregen, wenn ich mich in dieser Weise bei der Abgrenzung der Vorlesung je nach Umständen einrichte. Können doch ohnehin die mathematischen Vorlesungen an den Hochschulen bei der ihnen zur Verfügung stehenden Zeit nicht jeden Fall der späteren Anwendungen vorbereiten. Es ist ja auch wohl das anerkannte Ziel dieser Vorlesungen, dass sie dem Studirenden insoweit Schulung im mathematischen Denken und Fähigkeit im Operiren vermitteln, dass derselbe auch solchen später an ihn herantretenden theoretischen Fragen gewachsen ist, welche sich nicht unmittelbar einer eingelernten Regel unterordnen.

Braunschweig, im October 1897.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

XV. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

XVI. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Variabelen.

XVII. Capitel.

Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabelen.

XV. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

1. Definition und Gestalt der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die nächsten Betrachtungen beziehen sich auf eine reelle unabhängige Variabele x und eine reelle Function y von x.

Der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ von y nach x soll öfters abgekürzt y' geschrieben werden, und entsprechend bezeichnen wir späterhin die höheren Differentialquotienten durch y'', y''',...

Erklärung: *Eine Gleichung von der Gestalt:*

(1) . . . . $F(x, y, y') = 0,$

in welcher neben x und y auch noch der Differentialquotient erster Ordnung y' vorkommt, heisst eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variabelen.

Man spricht auch von einer *„gewöhnlichen"* Differentialgleichung im Gegensatze zu *„partiellen"* Differentialgleichungen, welche sich auf mehrere unabhängige Variabelen beziehen.

Als Beispiel einer Differentialgleichung (1) gelte:

$$(3x^2 - 7y^2)\frac{dy}{dx} - 17x + 12xy = 0.$$

Löst man die Gleichung (1) nach $y' = \frac{dy}{dx}$ auf, so nimmt sie die *zweite* Gestalt an:

(2) . . . . $\frac{dy}{dx} = G(x, y),$

wo die rechte Seite nur noch x und y, aber nicht mehr y' enthält.

Man multiplicire endlich die Gleichung (2) mit $\Psi(x, y)\,dx$, wo $\Psi(x, y)$ eine beliebige Function von x und y ist, und man setze zur Abkürzung:

$$\Psi(x,y)\,.\,G(x,y) = -\,\Phi(x,y).$$

Man gewinnt alsdann aus (2) als *dritte* Gestalt der Differentialgleichung:

(3) . . . . . . $\Phi(x,y)\,dx + \Psi(x,y)\,dy = 0.$

Hierbei merke man an, *dass in (3) die x und y allein enthaltenden Functionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ nur insoweit bestimmt sind, dass ihr Quotient $\Phi : \Psi$ mit $-G(x, y)$ identisch ist.*

2. Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen.

Erklärung: *Die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ auflösen heisst eine solche Function $y = f(x)$ von x angeben, dass die Gleichung:*

(1) . . . . $F[x, f(x), f'(x)] = 0$

für jeden Werth von x richtig ist und also in x eine „identische" Gleichung darstellt.

Eine solche Function $y = f(x)$ heisst eine „*Integralfunction*" oder kurz ein „*Integral*" der gegebenen Differentialgleichung. Ist die Integralfunction implicite durch eine Gleichung:

(2) . . . . $g(x, y) = 0$

gegeben, so heisst letztere eine „*Integralgleichung*" der vorgelegten Differentialgleichung.

So gehört z. B. zur Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

als ein Integral die Function $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Erklärung: *Die Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen $F(x, y, y') = 0$ ist, die Lösung derselben zu leisten, d. i. zu untersuchen, ob für eine vorgelegte Differentialgleichung überhaupt ein Integral existirt, sowie, falls es deren mehrere giebt, dieselben insgesammt anzugeben.*

3. Gradeintheilung der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es gelte jetzt die specielle Annahme, dass $F(x, y, y')$ in y und y' (aber nicht nothwendig in x) rational und ganz sei. Ein Beispiel für Differentialgleichungen dieser Art gebe:

(1) . . . $3xy^2 + 7yy'^2 \sin x - 25y + 3 = 0.$

Die Summe der Exponenten von y und y' im einzelnen Gliede von $F(x, y, y')$ liefere den *Grad* dieses Gliedes.

Erklärung: *Man spricht im vorliegenden Falle von einer Differentialgleichung erster Ordnung m^{ten} Grades, falls in $F(x, y, y')$ ein Glied m^{ten} Grades, jedoch keines von höherem Grade vorkommt.*

Die Differentialgleichung (1) ist hiernach eine solche dritten Grades.

Eine Differentialgleichung ersten Grades heisst auch eine „*lineare*“ Differentialgleichung.

Sind alle Glieder einer Differentialgleichung von gleichem Grade, so heisst dieselbe „*homogen*“.

4. Einführung einer geometrischen Deutung.

Die Variabelen x und y mögen als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene gedeutet werden. Es soll dann von der „*Umgebung*“ eines Punktes der Coordinaten x, y im Sinne von XIII, 1 und von einem in der Ebene eingegrenzten „*Bereiche*“ wie in IX, 3 gesprochen werden.

Eine vorgelegte Differentialgleichung denke man auf die zweite Form:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

gebracht. Man denke einen Bereich B in der Ebene eingegrenzt, innerhalb dessen die Function $G(x, y)$ eindeutig und stetig ist. Ist diese Function zunächst etwa mehrdeutig, so wird hiernach angenommen, dass für den einzelnen Punkt von B unter den verschiedenen zugehörigen Werthen der Function ein bestimmter aufgegriffen und zunächst allein mit $G(x, y)$ bezeichnet sei.

Für die so präcisirte Differentialgleichung sei eine Integralgleichung:

$$(2) \quad g(x, y) = 0$$

bekannt. Dieselbe stellt geometrisch eine in der Ebene gelegene Curve dar; wir bezeichnen die letztere als eine „*Integralcurve*“ der Differentialgleichung (1).

Sei nun auf einem etwa im Bereiche B verlaufenden Stücke der Integralcurve (2) ein beliebiger Punkt P der Coordinaten x_0, y_0 markirt. Die Ableitung der durch (2) implicite definirten Function y nach x werde für das Argument x_0 durch y'_0 bezeichnet und berechnet sich nach XII, 3 in der Gestalt:

$$(3) \quad y'_0 = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Da nach Einsetzung der Integralfunction y und ihrer Ableitung y' in (1) diese Gleichung für jedes x richtig ist, so stimmt der in (3) berechnete Werth y'_0 mit $G(x_0, y_0)$ überein.

Bei der bekannten, durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$ ausgesprochenen geometrischen Bedeutung der Ableitung y' (vergl. II, 2) entspringt hieraus (unter Fortlassung der Indices bei x_0, y_0) folgender

Lehrsatz: *Die Fortschreitungsrichtung der Integralcurve (2) in*

irgend einem ihrer Punkte x, y ist auf Grund der Gleichung:

$$tg\ \alpha = G\ (x, y)$$

durch die Differentialgleichung (1) selbst gegeben.

Dieser Satz spricht die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung (1) aus.

5. Construction einer Integralcurve aus Curvenelementen.

Der zuletzt aufgestellte Lehrsatz ist der Umkehrung fähig:

Lehrsatz: *Weiss man von einer durch $g\ (x, y) = 0$ gegebenen Curve, dass in jedem ihrer Punkte x, y die Function $tg\,\alpha$ des Richtungswinkels α mit $G\ (x, y)$ übereinstimmt, so ist jene Curve eine Integralcurve der Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = G\ (x, y).$$

In der That ist ja die Gleichung (1) durch die vermöge $g\ (x, y) = 0$ definirte Function y für jedes x erfüllt.

Hieraus entspringt bei vorgegebener Differentialgleichung (1) die Möglichkeit der „*Construction einer Integralcurve durch Aneinanderreihung von Curvenelementen*“.

Um $G\ (x, y)$ als eindeutig und stetig voraussetzen zu dürfen, schränken wir die Betrachtung wieder auf den oben gedachten Bereich B ein und wählen in letzterem einen beliebigen Ausgangspunkt P_0 der Coordinaten x_0, y_0. Von P_0 aus ziehe man in der durch $tg\ \alpha_0 = G\,(x_0, y_0)$ angezeigten Richtung ein Curvenelement ds_0 mit dem Endpunkte P_1 der Coordinaten $x_1 = x_0 + dx$, $y_1 = y_0 + dy$. Entsprechend zeichne man von P_1 aus ein zweites Element ds_1 in der durch $tg\ \alpha_1 = G\ (x_1, y_1)$ angegebenen Richtung und fahre in gleicher Weise fort. Man gewinnt so, wie Fig. 1 versinnlichen mag, eine Curve, in der man nach dem soeben ausgesprochenen Lehrsatze eine Integralcurve der Differentialgleichung (1) erkennt.

Fig. 1.

6. Die Schaar der Integralcurven einer Differentialgleichung.

Da der Ausgangspunkt P_0 der eben durchgeführten Construction innerhalb B willkürlich wählbar war, so gewinnt man in der bezeichneten Art nicht nur eine, sondern *unendlich viele Integralcurven einer und derselben Integralgleichung:*

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = G\ (x, y),$$

wie dies durch die in Fig. 2 ausgeführte Skizze näher angedeutet sein mag.

Es geht sogar, da $G(x, y)$ innerhalb B als eindeutig vorausgesetzt wurde, durch *jeden* Punkt dieses Bereiches *eine* Integralcurve von (1) hindurch, so dass B schlicht von Integralcurven bedeckt erscheint.

Fig. 2.

Hiermit haben wir Anschluss gewonnen an die in XIV, 5 gegebenen Entwickelungen über „*Curvenschaaren*", welche wir damals durch Gleichungen der Form $f(x, y, p) = 0$ darstellten, unter p einen „*Parameter*" verstanden.

In der That gilt folgender

Lehrsatz: *Für jede Differentialgleichung (1) existirt eine vermöge einer Gleichung:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad g(x, y, C) = 0$$

darstellbare Schaar von Integralcurven, wo C eine „willkürlich zu wählende Constante" ist bezw. den „Parameter" der Curvenschaar liefert.

Dass die oben construirte Schaar der Integralcurven durch eine Gleichung (2) darstellbar ist, kann man vermöge analytischer Entwickelungen zeigen, bei denen die Integralfunction y in eine Mac-Laurin'sche Reihe entwickelt wird. Da indessen die zugehörige Convergenzbetrachtung umständlich ist, so wird diese Rechnung hier nicht ausgeführt.

Ueberdies gilt der obige Lehrsatz nicht nur für den Bereich B, sondern allgemein. Dabei erhält man als weiteres Ergebniss, *dass durch den einzelnen Punkt x, y immer m Integralcurven hindurchlaufen, falls in der Umgebung dieses Punktes G (x, y) eine m-deutige Function ist.* Doch erfordert die erschöpfende Behandlung dieser Sätze weitergehende functionentheoretische Entwickelungen, für welche hier nicht der Ort ist.

Leicht beweisbar ist die Umkehrung:

Lehrsatz: *Ist irgend eine Curvenschaar vermöge einer Gleichung (2) gegeben, so giebt es stets eine Differentialgleichung:*

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

für welche jene Schaar die Integralcurven liefert.

Berechnet man nämlich für beliebig, aber fest gewähltes C, d. i. für irgend eine Curve der Schaar den Werth von $y' = \frac{dy}{dx}$, so dient nach XII, 3 hierzu die Gleichung:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dg}{dx} + \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man C aus den Gleichungen (2) und (4), so ergiebt sich eine zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ bestehende Relation (3), welche für jede Curve der Schaar und zwar für jeden ihrer Punkte erfüllt ist.

7. Das allgemeine Integral und die particulären Integrale einer Differentialgleichung.

Die Gleichung:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad g(x, y, C) = 0$$

lieferte für jeden Werth von C eine implicite definirte Integralfunction y unserer Differentialgleichung.

Erklärung: *Denkt man in (1) den Werth von C noch gänzlich unbestimmt gelassen, so sagt man, die Gleichung (1) liefere das „allgemeine Integral" oder die „allgemeine Integralgleichung"; jede besondere Auswahl von C liefert ein „particuläres Integral" der Differentialgleichung.*

Die einzelne Curve aus der Schaar der Integralcurven entspricht demnach stets einem particulären Integral.

Wollen wir die Integralfunction explicite darstellen, so bedienen wir uns im Anschluss an Nr. 2 (S. 2) der Bezeichnung:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f(x, C).$$

8. Lösung von Differentialgleichungen durch Quadraturen.

Ist die rechte Seite G einer in die zweite Gestalt gesetzten Differentialgleichung von y unabhängig, so kann diese Gleichung auch geschrieben werden:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad dy = G(x)\,dx.$$

In diesem Falle ist also das Differential dy der gesuchten Function y in dx und x allein dargestellt; die gewöhnliche Integralrechnung liefert somit:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = \int G(x)\,dx + C.$$

Beim Gebrauch eines bestimmten Integrals lässt sich die Constante C auch durch eine willkürlich zu wählende untere Grenze a ersetzen:

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = \int_a^x G(x)\,dx.$$

Wegen der ursprünglichen in VI, 6 entwickelten geometrischen Bedeutung der Integrale bezeichnet man die Berechnung eines bestimmten oder auch unbestimmten Integrals kurz als eine „*Quadratur*".

Man sagt alsdann, die Differentialgleichung (1) sei „durch eine Quadratur lösbar."

Es gilt der Satz, *dass viele (aber keineswegs alle) Differentialgleichungen erster Ordnung entweder unmittelbar oder nach geeigneten Transformationen durch Quadraturen lösbar sind.*

Auf derartige Auflösungen durch Quadraturen beziehen sich die zunächst zu entwickenden Regeln.

9. Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variabelen.

Lehrsatz: *Gelingt es, eine gegebene Differentialgleichung in der Weise in die dritte Gestalt (3) S. 2 zu setzen, dass Φ nur von x und Ψ nur von y abhängt:*

(1) . . . . . . $\Phi(x)\,dx + \Psi(y)\,dy = 0,$

so wird das allgemeine Integral durch Quadraturen in der Form:

(2) . . . . . $\int \Phi(x)\,dx + \int \Psi(y)\,dy = C$

gewonnen. Diese Art der Lösung wird als die „Methode der Trennung der Variabelen" bezeichnet, insofern im ersten Gliede von (1) nur x und dx, im zweiten nur y und dy vorkommen.

Um Formel (2) zu beweisen, führe man eine dritte Variabele z ein, indem man $dz = \Phi(x)\,dx$ setzt. Dann ist $dz = -\Psi(y)\,dy$, und man hat somit:

$$z = \int \Phi(x)\,dx + C_1, \qquad -z = \int \Psi(y)\,dy + C_2.$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert Formel (2), falls man die negative Summe von C_1 und C_2 durch C bezeichnet. —

Beispiel: Es sollen alle ebenen Curven gefunden werden, für welche die Subtangente jedes Punktes die constante Länge 1 hat.

Nach V, 2 ist die Subtangente St im einzelnen Punkte einer Curve durch $y\,\frac{dx}{dy}$ dargestellt. Soll demnach St stets $= 1$ sein, so gilt die Gleichung:

$$y\,\frac{dx}{dy} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = y;$$

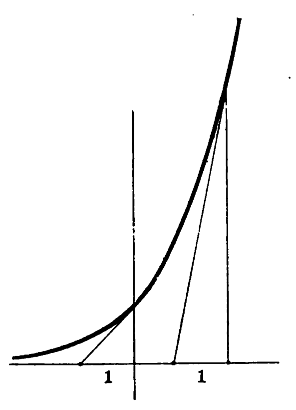
dieselbe stellt die „Differentialgleichung der gesuchten Curve" dar.

Die Trennung der Variabelen und Lösung wird vollzogen durch:

$$dx - \frac{dy}{y} = 0, \quad x - \log y = C,$$

woraus man $y = e^{x-C}$ als allgemeines Integral erhält.

Fig. 3.



Für $C = 0$ gewinnt man die Exponentialcurve, für welche die Eigenschaft constanter Subtangente durch Fig. 3 (a. v. S.) versinnlicht werden mag. Alle übrigen Integralcurven gehen aus der Exponentialcurve durch Verschiebung im Sinne der x-Axe hervor.

10. Lösung der Differentialgleichungen von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die Function G von x und y möge jetzt im Speciellen so gebaut sein, dass sie als Function allein vom Quotienten $\frac{y}{x}$ angesehen werden kann; wir bedienen uns dieserhalb direct der Schreibweise $G\left(\frac{y}{x}\right)$ und haben es hiernach zu thun mit der Differentialgleichung:

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Lehrsatz: *Die Auflösung der Differentialgleichung (1) gelingt nach Substitution der neuen Variabelen* $z = \frac{y}{x}$ *vermöge der Methode der Trennung der Variabelen und liefert als allgemeine Integralgleichung:*

$$(2) \quad \dots\dots \quad \log x - \int \frac{dz}{G(z) - z} = C,$$

wobei man nach Berechnung des Integrals linker Hand für z *wieder* $\frac{y}{x}$ *gesetzt denke.*

Durch Differentiation von $y = xz$ folgt nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

so dass sich die Differentialgleichung (1) transformirt in:

$$x\frac{dz}{dx} + z = G(z) \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x} - \frac{dz}{G(z) - z} = 0.$$

Hier ist die Trennung der Variabelen vollzogen und die Integration liefert die Formel (2).

Beispiel: Um das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$$

zu gewinnen, führe man z wie oben ein, wodurch die Differentialgleichung übergeht in:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0.$$

Die Integration und Wiedereinführung von y liefert:

$$x(x + 2y) = C.$$

11. Lösung der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nach Nr. 3 (S. 3) hat eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung die Gestalt:

$$F(x)\frac{dy}{dx} + G(x)\,y + H(x) = 0,$$

wo $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ beliebige Functionen von x sind.

Dividirt man diese Gleichung durch $F(x)$ und nennt die Quotienten von G durch F und H durch F kurz $P(x)$ und $Q(x)$, so folgt als „*Normalform einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung*“:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)\,y + Q(x) = 0.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, verstehen wir unter z irgend ein particuläres Integral der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} + P(x)\,z = 0,$$

die mit (1) in den beiden ersten Gliedern gleichgebaut ist.

Die Gleichung (2) ist durch Trennung der Variabelen lösbar und liefert:

$$(3) \qquad z = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Der Quotient von y und z heisse u; dann ist:

$$y = zu, \quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

so dass die Differentialgleichung (1) die Gestalt annimmt:

$$z\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dz}{dx} + zP(x)\right) + Q(x) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$z\frac{du}{dx} + Q(x) = 0, \quad du = -\frac{Q(x)}{z}\,dx.$$

Da z als Function von x aus (3) bekannt ist, so folgt durch Integration der letzten Differentialgleichung:

$$u = C - \int \frac{Q(x)}{z}\,dx,$$

wo C die Integrationsconstante ist.

Durch Wiedereinführung von y und Einsetzung des in (3) berechneten Ausdrucks von z ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung (1) ist durch Quadraturen lösbar und besitzt als allgemeines Integral:*

$$(4) \quad . \quad . \quad y = e^{-\int P(x)\,dx} . \left[C - \int Q(x) \, . \, e^{\int P(x)\,dx}\, dx\right].$$

Eine andere Auswahl der Integrationsconstanten bei $\int P(x)\,dx$ hat allein eine Veränderung der Constanten C in (4) zur Folge.

Beispiel: Im Falle der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}\,y - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ist die Function z gegeben durch:

$$z = e^{\int \frac{x\,dx}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} = \sqrt{1+x^2}.$$

Die oben mit u bezeichnete Function wird demnach hier:

$$u = C + \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = C + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

und man findet als allgemeines Integral:

$$y = x + C\sqrt{1+x^2}.$$

12. Der integrirende Factor einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung sei in der dritten Gestalt:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Phi(x,y)\,dx + \Psi(x,y)\,dy = 0$$

gegeben. Wir multipliciren die linke Seite mit einer sogleich näher zu definirenden Function $\mu(x,y)$ von x und y und erhalten so unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$(2) \qquad \mu(x,y)\,\Phi(x,y) = \varphi(x,y), \quad \mu(x,y)\,\Psi(x,y) = \psi(x,y)$$

als neue Gestalt der Differentialgleichung:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0.$$

Erklärung: *Die Function $\mu(x,y)$ heisst ein „integrirender Factor" der gegebenen Differentialgleichung (1), falls die linke Seite von (3) für „unabhängig gedachte Variabele x, y" im Sinne von XII, 8 ein totales Differential darstellt.*

Es gilt nun zunächst der folgende

Lehrsatz: *Für jede Differentialgleichung (1) existirt wenigstens ein integrirender Factor.*

Es existirt nämlich für (1) eine Integralgleichung $g(x,y,C) = 0$, die wir nach C auflösen und in die Gestalt setzen:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h(x,y) = C.$$

Hieraus ergiebt sich nach Nr. 4 ff., dass der aus (4) zu berechnende Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}}$$

für alle Werthepaare x, y mit dem aus (1) entspringenden Quotienten $-\frac{\Phi}{\Psi}$ gleich ist; es wird mithin die Gleichung:

$$-\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}} = -\frac{\Phi}{\Psi} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\Phi(x,y)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\Psi(x,y)}$$

identisch, d. i. für unabhängig von einander gedachte x, y bestehen.

Nennt man jetzt den gemeinsamen Werth der rechten und linken Seite der letzten Gleichung als Function von x und y sogleich $\mu(x,y)$, so ist μ in der That ein integrirender Factor; denn $(\mu\Phi dx + \mu\Psi dy)$ ist das totale Differential der Function $h(x,y)$. —

Lehrsatz: *Für die Differentialgleichung (1) existiren unendlich viele integrirende Factoren, welche sämmtlich durch einen von ihnen, z. B. den eben gewonnenen, in der Gestalt darstellbar sind:*

(5) . . . . $\mu(x,y) \cdot \chi[h(x,y)]$;

hierbei bedeutet χ eine willkürlich zu wählende Function.

Man bezeichne nämlich, indem man x und y auch weiterhin als unabhängig von einander ansieht, $h(x,y)$ als Function von x und y abgekürzt durch $z = h(x,y)$.

Dann gilt für das totale Differential dz:

$$\mu\Phi dx + \mu\Psi dy = dz,$$

woraus sich durch Multiplication mit der willkürlich zu wählenden Function $\chi(z)$ ergiebt:

$$\mu\chi(\Phi dx + \Psi dy) = \chi(z)dz = d\left[\int \chi(z)dz\right].$$

Das Integral rechter Hand denke man ausgerechnet und sodann $z = h(x,y)$ gesetzt; alsdann steht rechts das totale Differential einer Function von x und y, so dass $\mu\chi$ in der That ein integrirender Factor ist.

Ist andererseits $M(x,y)$ ein beliebiger integrirender Factor, und möge die mit M multiplicirte linke Seite der Differentialgleichung (1) das totale Differential der Function $Z = H(x,y)$ darstellen:

$$M(\Phi dx + \Psi dy) = dH(x,y),$$

so gilt die Gleichung:

$$\Phi dx + \Psi dy = \frac{dZ}{M} = \frac{dz}{\mu}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dZ = \left(\frac{M}{\mu}\right) dz,$$

Man denke jetzt y aus $z = h(x, y)$ in x und z dargestellt und in $Z = H(x, y)$ eingesetzt. Hierdurch wird Z eine Function der beiden Variabelen x und z. Für das totale Differential dZ gilt demnach:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial z} dz.$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks für dZ mit dem in (6) berechneten Werthe desselben totalen Differentials dZ zeigt, dass $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ ist, d. h. dass Z von z allein abhängt. Gleiches gilt demnach auch von $\frac{\partial Z}{\partial z}$. Setzen wir in diesem Sinne $\frac{\partial Z}{\partial z} = \chi(z)$, so wird:

$$dZ = \chi(z)\, dz,$$

womit der aufgestellte Satz im vollen Umfange bewiesen ist.

13. Auflösung der Differentialgleichung vermöge eines integrirenden Factors.

Lehrsatz: *Liefert die linke Seite einer Differentialgleichung (1) Nr. 12 nach Zusatz eines integrirenden Factors μ das totale Differential $(\varphi dx + \psi dy)$ der Function $h(x, y)$, so ist die allgemeine Integralgleichung:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h(x, y) = C.$$

Es folgt nämlich aus (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}} = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

und also hat die bei irgendwie gewähltem C durch (1) dargestellte Curve in jedem ihrer Punkte die durch die Differentialgleichung vorgeschriebene Richtung (vergl, Nr. 5, S. 4).

Die Berechnung von $h(x, y)$ aus φ und ψ leistet man nach XII, 8 vermöge der Formel:

$$(2) \quad . \quad . \quad h(x, y) = \int \varphi\, dx + \int \left[\psi - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi\, dx\right] dy.$$

14. Partielle Differentialgleichung für den integrirenden Factor.

Als hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass $(\varphi dx + \psi dy)$ ein totales Differential ist, hat man nach XII, 8 das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}.$$

Für einen integrirenden Factor μ der Differentialgleichung (1), Nr. 12 muss hiernach die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial(\mu\Phi)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\Psi)}{\partial x}.$$

Durch Weiterentwickelung dieser Relation entspringt der

Lehrsatz: *Jeder integrirende Factor μ der Differentialgleichung (1), Nr. 12 befriedigt die „partielle Differentialgleichung erster Ordnung":*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \Psi\frac{\partial\mu}{\partial x} - \Phi\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\mu = 0,$$

und umgekehrt ist jede diese Gleichung befriedigende Function $\mu(x, y)$ ein integrirender Factor.

Hier gelten Ψ, Φ und der Ausdruck in der Klammer als gegebene Functionen von x und y, während μ als die gesuchte Function der beiden „unabhängigen" Variabelen x und y anzusehen ist.

Besonders wichtig sind die beiden Specialfälle, dass es einen von y oder einen von x unabhängigen integrirenden Factor giebt.

Gilt der erstere Fall, so ist für das betreffende μ:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mu}{dy} = 0$$

zu setzen, so dass die Gleichung (1) liefert:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}}{\Psi}.$$

Da μ hier nur von x abhängt, so muss dasselbe von der linken und also auch der rechten Seite dieser Gleichung gelten.

Kommt andererseits rechts y nicht mehr vor, so findet man durch Lösung der „gewöhnlichen" Differentialgleichung (2) für μ eine Function von x allein, die nach obigem Lehrsatze einen integrirenden Factor liefert:

Lehrsatz: *Zeigt sich, dass aus dem Quotienten* $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) : \Psi$ *die Variabele y herausfällt, so giebt es den nur von x abhängenden integrirenden Factor:*

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu = C \cdot e^{\int \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}}{\Psi} \cdot dx}.$$

Entsprechendes gilt für den Fall, dass ein nur von y abhängender integrirender Factor existirt. —

Beispiel: Für die Differentialgleichung:

$$(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0$$

ergiebt sich:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\Psi} = -\frac{2x}{1+x^2},$$

so dass hier ein von y unabhängiger integrirender Factor existirt.

Für denselben findet man aus Formel (3), indem man $C = 1$ setzt:

$$\mu = \frac{1}{1+x^2},$$

so dass die mit μ multiplicirte Differentialgleichung:

$$\left(y + \frac{1}{1+x^2}\right) dx + x\,dy = 0$$

lautet.

Formel (2), Nr. 13 liefert als allgemeines Integral:

$$xy + \operatorname{arc\,tg} x = C.$$

15. Von den singulären Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung.

In XIV, 5 wurde unterschieden, ob eine Curvenschaar eine einhüllende Curve besitzt oder nicht. Im ersteren Falle wurde die einhüllende Curve von allen Schnittpunkten „consecutiver" Curven der Schaar gebildet. Man kann auch sagen, dass die einzelne Curve der Schaar ein Bogendifferential der einhüllenden Curve liefert; dasselbe würde eingegrenzt sein durch zwei unendlich nahe Punkte, in denen die herausgegriffene Curve von der zunächst voraufgehenden und der nächstfolgenden Curve der Schaar geschnitten wird.

Hieraus folgt, dass die einhüllende Curve an der von der einzelnen Curve der Schaar gelieferten Stelle letztere Curve berührt und also mit ihr gemeinsame Tangentenrichtung hat.

Hat somit eine Schaar von Integralcurven einer Differentialgleichung eine einhüllende Curve, so hat letztere in allen ihren Punkten die durch die Differentialgleichung geforderte Richtung.

Lehrsatz: *Besitzt die Schaar der Integralcurven eine einhüllende Curve, so liefert letztere ein Integral der Differentialgleichung, welches keine willkürliche Constante mehr enthält, aber gleichwohl nicht zu den particulären Integralen gehört. Man bezeichnet das so gewonnene Integral als ein „singuläres".*

Dies Ergebniss lässt sich auch durch Rechnung begründen.

Aus der Gleichung $g(x, y, C) = 0$ der Schaar entspringt nach XIV, 5 diejenige der einhüllenden Curve, indem man C aus

$$(1) \quad \ldots \quad g(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

eliminirt. Dies werde so vollzogen, dass man aus der zweiten Gleichung C als Function von x, y berechnet, $C = h(x, y)$, und diesen Werth von C in die erste Gleichung einträgt:

$$g(x, y, C) = 0, \quad C = h(x, y).$$

Um die Richtung der einhüllenden Curve an der Stelle x, y zu bestimmen, gehen wir auf dieser Curve zu dem mit x, y nächst benachbarten Punkte der Coordinaten $x + dx$, $y + dy$. Hierbei gilt:

$$(2) \quad \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial C} dC = 0,$$

wo für C (in den partiellen Ableitungen) und für dC zu setzen ist:

$$(3) \quad \ldots \quad C = h(x, y), \quad dC = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy.$$

Aber dieser Werth C berechnete sich durch Auflösung der zweiten Gleichung (1) nach C. Also wird nach Eintragung von $C = h(x, y)$ in (2) die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial C}$ im dritten Gliede dieser Gleichung verschwinden, so dass sich die Richtung der einhüllenden Curve berechnet aus:

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0.$$

Andererseits liefert das vorliegende C die zur Stelle x, y der einhüllenden Curve gehörende Curve der Schaar $g(x, y, C) = 0$. Die Richtung dieser Curve wird somit gleichfalls durch Formel (4) angegeben, so dass letztere Curve an der Stelle x, y in der That mit der einhüllenden Curve gleichgerichtet ist. —

Beispiel: Die Differentialgleichung zweiten Grades:

$$yy'^2 - 2xy' + y = 0$$

liefert, nach y' aufgelöst:

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}.$$

Die hier auftretende Function $G(x, y)$ ist auf den durch

$$(6) \quad \ldots \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x \pm y = 0$$

dargestellten beiden Geraden der xy-Ebene eindeutig. In denjenigen durch diese beiden Geraden gebildeten Quadranten, welche von der x-Axe durchzogen sind, ist $G(x, y)$ zweideutig, in den beiden anderen nulldeutig [1]).

Jene beiden Quadranten werden schlicht von Integralcurven bedeckt sein, und zwar laufen durch jeden Punkt zwei solche hindurch; die letzteren Quadranten sind indess frei von Integralcurven.

---

[1]) Im Anschluss an I, 5 heisst $G(x, y)$ für ein Werthepaar x, y nulldeutig, falls für letzteres $G(x, y)$ keinen *reellen* Werth besitzt.

Gleichung (6) stellt demnach die in zwei Geraden zerfallende einhüllende Curve dar und liefert dieserhalb ein singuläres Integral.

Um dies durch Rechnung zu bestätigen, führe man an Stelle von y die neue Variabele ein:

$$z = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}$$

und findet hieraus:

$$y = \frac{2xz}{1+z^2}, \quad y' = 2\,\frac{xz'(1-z^2) + z(1+z^2)}{(1+z^2)^2}.$$

Die Differentialgleichung transformirt sich in:

$$2x\frac{dz}{dx} + z(1+z^2) = 0,$$

die nach Nr. 9 (S. 7) leicht lösbar ist.

Fig. 4.

Nach Wiedereinführung von y ergiebt sich als allgemeines Integral von (5):

$$y^2 - 2Cx + C^2 = 0.$$

Hierdurch ist ein *Schaar von Parabeln* dargestellt (vergl. Fig. 4), deren einhüllende Curve durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$y^2 - 2Cx + C^2 = 0 \quad \text{und} \quad -x + C = 0$$

in der That die Gleichungsform (6) gewinnt.

16. Von den isogonalen Trajectorien einer Curvenschaar.

Erklärung: *Eine Curve, welche die Curven einer gegebenen Schaar immer unter dem gleichen Winkel ϑ durchschneidet, heisst eine „gleichwinklige" oder „isogonale Trajectorie" dieser Schaar. Ist insbesondere ϑ ein rechter Winkel, so spricht man von einer „orthogonalen Trajectorie".*

Die gegebene Schaar, welche durch $g(x, y, C) = 0$ dargestellt sein mag, besitzt stets eine ganze Schaar isogonaler Trajectorien eines gegebenen Winkels ϑ, die wir etwa durch $g_1(x, y, C_1) = 0$ dargestellt denken. Offenbar ist das Verhältniss beider Schaaren ein gegenseitiges.

Als Beispiel benutze man die Schaar aller Geraden durch den Nullpunkt der xy-Ebene. Die concentrischen Kreise um diesen Punkt liefern dann die Schaar der orthogonalen Trajectorien (vergl. Fig. 5).

Bei gegebener Schaar $g(x, y, C) = 0$ kann man die Differentialgleichung für die Schaar der Trajectorien des Winkels ϑ in folgender Art aufstellen.

Ein beliebiger Punkt P habe die Coordinaten x, y. Um die durch ihn hindurchziehende Curve der gegebenen Schaar zu finden, löse man $g(x, y, C) = 0$ nach C in $C = h(x, y)$ auf. Indem man die Coordinaten von P in $h(x, y)$ einsetzt, gewinnt man den zu der gewünschten Curve gehörenden Werth des Parameters C.

Fig. 5.

Die Richtung der fraglichen Curve im Punkte P ist durch:

$$(1)\quad tg\,\alpha = -\frac{g'_x(x, y, C)}{g'_y(x, y, C)},\quad C = h(x, y)$$

gegeben.

Die durch P hindurchziehende Trajectorie des Winkels ϑ liefert zufolge Fig. 6 folgenden Differentialquotienten bezw. folgende Richtung:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha_1 = tg\,(\vartheta + \alpha) = \frac{tg\,\vartheta + tg\,\alpha}{1 - tg\,\vartheta\,tg\,\alpha}.$$

Trägt man für $tg\,\alpha$ den in (1) berechneten Ausdruck ein, so ergiebt sich der

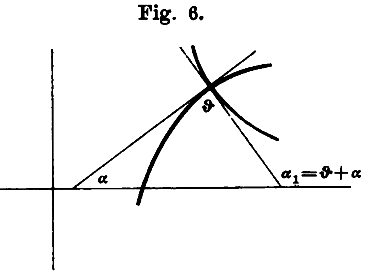
Lehrsatz: *Die Differentialgleichung der zur Schaar $g(x, y, C) = 0$ gehörenden isogonalen Trajectorien des Winkels ϑ entspringt durch Elimination von C aus $g(x, y, C) = 0$ und:*

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx}(\sin\vartheta\, g'_x + \cos\vartheta\, g'_y) + (\cos\vartheta\, g'_x - \sin\vartheta\, g'_y) = 0.$$

Speciell für die orthogonalen Trajectorien lautet die Gleichung (2):

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx}\, g'_x - g'_y = 0. -$$

Fig. 6.

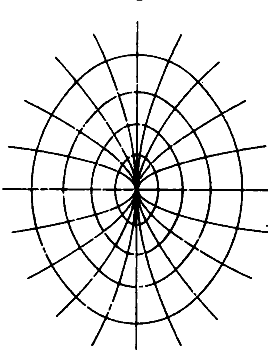


Beispiel: Durch $y^2 - Cx = 0$ ist die Schaar aller Parabeln dargestellt, welche den Nullpunkt zum Scheitelpunkte und die x-Axe zur Axe haben.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien ergiebt sich durch Elimination von C aus:

$$C\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad\text{und}\quad y^2 - Cx = 0$$

Fig. 7.



und hat somit die Gestalt:

$$2x\,dx + y\,dy = 0.$$

Durch Integration findet man als Gleichung $g_1(x, y, C_1) = 0$ der Schaar der Trajectorien:

$$2x^2 + y^2 = C_1.$$

Hierdurch ist eine Schaar von Ellipsen dargestellt, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte und eine auf der y-Axe gelegene grosse Axe haben. In Fig. 7 sind diese Verhältnisse zur Darstellung gebracht.

XVI. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Variabelen.

---

1. Definition und Gradeintheilung der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Erklärung: *Eine Gleichung:*

(1) . . . , . . $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x, einer Function y derselben und den Ableitungen $y', y'', \ldots$ von y nach x heisst eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, wenn die Ableitung n^{ter} Ordnung $y^{(n)}$, aber keine Ableitung noch höherer Ordnung in ihr auftritt.

Man spricht auch von „*gewöhnlichen*" Differentialgleichungen höherer Ordnung im Gegensatz zu „*partiellen*", bei denen mehrere unabhängige Variabelen vorliegen.

Die Theorie der Differentialgleichungen (1) behandelt die Aufgabe, im Einzelfalle die Lösungen oder Integrale der Differentialgleichung zu finden, d. h. diejenigen Functionen $y = f(x)$ herzustellen, für deren einzelne die Gleichung:

(2) . . . . $F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)] = 0$

zu einer in x identisch bestehenden wird.

Ist die linke Seite der Gleichung (1) in $y, y', \ldots, y^{(n)}$ rational und ganz, so liefert die Summe der Exponenten von $y, y', \ldots, y^{(n)}$ im einzelnen Gliede den „*Grad*" dieses Gliedes.

Erklärung: *Man spricht in diesem Falle von einer Differentialgleichung „m^{ten} Grades", falls in $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ein Glied m^{ten} Grades, jedoch keines von noch höherem Grade wirklich vorkommt.*

Eine Differentialgleichung ersten Grades heisst auch „*linear*". Dieselbe lässt sich auf die Gestalt bringen:

$$F_0(x)\,y^{(n)} + F_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + F_{n-1}(x)\,y' + F_n(x)\,y = F_{n+1}(x),$$

wo die „Coëfficienten" $F_0, F_1, \ldots$ der einzelnen Ableitungen $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}, \ldots$ irgend welche Functionen von x sind.

Durch Division mit $F_0(x)$ kann man den Coëfficienten von $y^{(n)}$ gleich 1 machen.

Erklärung: *Als „Normalform" einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gilt:*

$$(3)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)\,y = Q(x),$$

wo $P_1(x), \ldots, P_n(x), Q(x)$ irgend welche Functionen von x sind und die Ableitungen $y', y'', \ldots$ als Differentialquotienten geschrieben wurden.

Ist $Q(x)$ stets $= 0$, so heisst die Differentialgleichung (3) „homogen".

2. Auflösung der Differentialgleichungen $y^{(n)} = G(x)$.

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung ist im Allgemeinen nicht durch Quadraturen lösbar; doch gelingt dies in speciellen Fällen zu denen in erster Linie die Differentialgleichung:

$$(1)\quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = G(x)$$

gehört, unter $G(x)$ eine Function von x allein verstanden.

Die linke Seite von (1) ist die erste Ableitung von $y^{(n-1)}$, so dass man aus (1) folgert:

$$d\,y^{(n-1)} = G(x)\,dx.$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus:

$$y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int G(x)\,dx + C_1,$$

wo C_1 eine erste willkürlich zu wählende Constante ist.

Durch wiederholte Anwendung des gleichen Verfahrens gewinnt man den

Lehrsatz: *Das „allgemeine" Integral der Differentialgleichung (1) ist:*

$$(2)\quad y = \int^{(n)} G(x)\,dx^n + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n,$$

wo im ersten Gliede rechter Hand n Male hinter einander integrirt ist, und wo die n Constanten $C_1, \ldots, C_n$ willkürlich wählbar sind.

Diese Constanten lassen sich dadurch bestimmen, dass man für n verschiedene Argumente x zugehörige Werthe der Integralfunction y vorschreibt; man gelangt so zu einem „particulären" Integrale der Differentialgleichung (1).

3. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y', y'') = 0$.

Es sollen zweitens die Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(1) \quad F(y', y'') = 0$$

betrachtet werden, in denen nur die zweite und erste Ableitung der gesuchten Function, aber weder diese selbst noch x auftritt.

Man löse die Gleichung (1) nach y'' auf:

$$y'' = G(y')$$

und substituire $y' = z$, wodurch man erhält:

$$\frac{dz}{dx} = G(z), \qquad dx = \frac{dz}{G(z)}.$$

Die Integration liefert:

$$(2) \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{G(z)},$$

eine Gleichung, deren Auflösung nach z ergeben mag:

$$(3) \quad z = H(x, C_1).$$

Setzt man jetzt für z wieder $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$dy = H(x, C_1)\, dx,$$

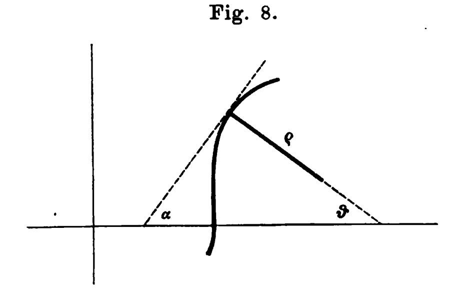
so dass eine erneute Integration die gesuchte Function:

$$(4) \quad y = \int H(x, C_1)\, dx + C_2$$

liefert.

Lehrsatz: *Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher x und y selber nicht vorkommen, ist durch zwei Quadraturen lösbar, wobei sich im „allgemeinen" Ingetral (4) zwei willkürliche Constanten C_1 und C_2 einfinden.* —

Fig. 8.



Beispiel: Es sollen diejenigen Curven gefunden werden, für welche die Projection des Krümmungsradius auf die x-Axe beständig gleich 1 ist.

Für den Krümmungsradius ϱ und den Cosinus seines Neigungswinkels ϑ gegen die x-Axe (vergl. Fig. 8) hat man folgende Gleichungen:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \cos \vartheta = \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wie aus V, 7 und II, 2 hervorgeht.

Die Forderung $\varrho \cos \vartheta = 1$ liefert für die gesuchten Curven die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0.$$

Durch Einführung von $z = y'$ gewinnen wir:

$$\frac{dz}{dx} = z(1 + z^2) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dz}{z} - \frac{z\,dz}{1 + z^2},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\log z - \log \sqrt{1 + z^2} = x + C_1 \quad \text{oder} \quad \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = e^{x + C_1}.$$

Zur Abkürzung schreibe man weiter:

$$u = e^{x + C_1}, \quad \text{so dass} \quad du = u\,dx$$

wird, während sich z in u wie folgt darstellt:

$$z = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Setzt man jetzt $z = y'$ ein, so ergiebt sich:

$$dy = \frac{u\,dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \text{und also} \quad dy = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Die zweite Integration liefert $y + C_2 = \arcsin u$, ein Ergebniss, welches durch Wiedereinführung von x und einfache Umgestaltung als allgemeine Integralgleichung liefert:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad x + C_1 = \log \sin (y + C_2).$$

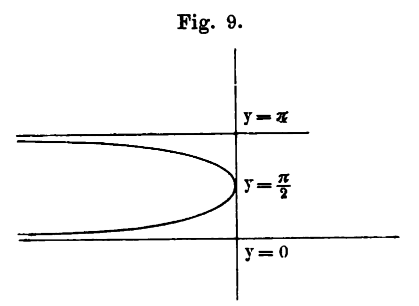
Nimmt man $C_1 = C_2 = 0$, so folgt:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = \log \sin y,$$

wodurch x in y als eine ein- bezw. nulldeutige Function dargestellt ist, je nachdem $\sin y > 0$ oder < 0 ist.

Die durch Gleichung (7) dargestellte Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Zweigen, deren erster in Fig. 9 dargestellt ist und die beiden Geraden $y = 0$, $y = \pi$ zu Asymptoten hat. Die übrigen Zweige entstehen aus jenem ersten durch Verschiebung um $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ im Sinne der y-Axe.

Fig. 9.



Alle übrigen Curven (6) erhält man aus der hiermit betrachteten durch Parallelverschiebung in der xy-Ebene.

4. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Die Entwickelungen der beiden letzten Nummern liefern auch die Mittel zur Auflösung der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

(1) . . . . $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$

in welcher ausser der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y keine weitere Ableitung und auch x und y selbst nicht vorkommen.

Man löse Gleichung (1) nach $y^{(n)}$ auf:

(2) . . . . $$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

und führe $y^{(n-1)}$ als neue Variabele z ein, womit die Gleichung (2) die Gestalt annimmt:

(3) . . . . . $$\frac{dz}{dx} = G(z) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dz}{G(z)}.$$

Die Integration liefert genau wie in Nr. 3:

(4) . . . . $$x + C_1 = \int \frac{dz}{G(z)},$$

eine Gleichung, die man nach Ausrechnung des rechts stehenden Integrals auf die Form bringen wolle:

(5) . . . . $z = H(x, C_1).$

Durch Wiedereinführung von $y^{(n-1)}$ statt z entspringt:

(6) . . . . $$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = H(x, C_1),$$

womit wir auf eine Differentialgleichung (1), Nr. 2 geführt sind:

Lehrsatz: *Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, in welcher einzig $y^{(n)}$ und $y^{(n-1)}$ auftreten, lässt sich durch Ausführung einer Quadratur auf eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des in Nr. 2 behandelten Typus zurückführen. Letztere Differentialgleichung wird unmittelbar durch $(n-1)$ weitere Quadraturen gelöst. Insgesammt stellen sich n willkürliche Constanten ein.*

5. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y, y'') = 0$.

Als weiteres Beispiel einer durch Quadraturen auflösbaren Differentialgleichung betrachten wir:

(1) . . . . $F(y, y'') = 0,$

wo neben der unbekannten Function y selbst nur noch deren zweite Ableitung auftritt.

Durch Auflösung nach y'' setze man Gleichung (1) in die Gestalt:

(2) . . . . $$\frac{d^2 y}{dx^2} = G(y)$$

und multiplicire mit $2\,dy$:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx = 2\,G(y)\,dy.$$

Zur Umformung der linken Seite benutze man:

$$d\,(y'^2) = 2\,y'\,dy' = 2\,y'.y''\,dx,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx,$$

womit sich unsere Differentialgleichung in die neue Gestalt transformirt:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2\,G(y)\,dy.$$

Gleichung (4) gestattet unmittelbar die Integration und liefert:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int G(y)\,dy + C_1, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int G(y)\,dy + C_1}}.$$

Nochmalige Integration liefert die allgemeine Integralgleichung.

Lehrsatz: *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2), in welcher x und y' nicht vorkommen, lässt sich durch zwei Quadraturen auflösen und liefert als allgemeine Integralgleichung:*

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad x = \int\frac{dy}{\sqrt{2\int G(y)\,dy + C_1}} + C_2. \text{ —}$$

Beispiel: Es soll das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu^2 y$$

berechnet werden.

Die mit $2\,dy$ multiplicirte Differentialgleichung ist:

$$2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx = d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \mu^2\,.\,2\,y\,dy.$$

Durch Integration folgt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mu^2\,(y^2 + C_1),$$

$$\mu\,dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1}},$$

so dass die zweite Integration auf die Gleichung führt:

$$\mu x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + C_1}\right) + C_2.$$

Um das allgemeine Integral y explicit zu berechnen, entnehmen wir aus der letzten Gleichung:

$$y + \sqrt{y^2 + C_1} = e^{\mu x - C_2},$$

$$-\,y + \sqrt{y^2 + C_1} = C_1\,e^{-\mu x + C_2}.$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten folgt:

$$2y = e^{-C_2} \cdot e^{\mu x} - C_1 e^{C_2} \cdot e^{-\mu x}.$$

Setzt man hier zur Abkürzung:

$$e^{-C_2} = 2A, \qquad -C_1 e^{C_2} = 2B,$$

so entspringt als einfachste Gestalt der gesuchten Integralfunction:

$$y = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

wo A und B willkürliche Constanten sind.

6. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

Die Methode der voraufgehenden Nummer überträgt sich unmittelbar auf die Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung:

(1) . . . . $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0,$

in denen neben der n^{ten} Ableitung der gesuchten Function nur noch die $(n-2)^{\text{te}}$ vorkommt.

Eine vorgelegte Gleichung (1) löse man nach $y^{(n)}$ auf:

(2) . . . . $y^{(n)} = G(y^{(n-2)})$

und substituire demnächst für $y^{(n-2)}$ die neue Variabele z:

$$y^{(n-2)} = z, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = G(z).$$

Die damit erhaltene Differentialgleichung zweiter Ordnung für z liefert nach Nr. 5 als allgemeine Integralgleichung:

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{2\int G(z)\,dz + C_1}} + C_2.$$

Nach Berechnung des Integralausdruckes rechter Hand denke man die zwischen x und z erhaltene Gleichung nach z aufgelöst:

$$z = H(x, C_1, C_2)$$

und führe hier wieder y ein.

Lehrsatz: *Die Differentialgleichung (1), in welcher neben $y^{(n)}$ nur $y^{(n-2)}$ auftritt, kann in der bezeichneten Weise durch Ausführung zweier Quadraturen auf die Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:*

(3) . . . . $\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = H(x, C_1, C_2)$

reducirt werden, welche letztere nach Nr. 2 durch weitere $(n-2)$ Quadraturen lösbar ist.

7. Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

Unter den Differentialgleichungen höherer Ordnung sind es vor allen die „*linearen*“, welche ausführlich untersucht worden sind.

Es sollen zunächst einige Sätze über „*homogene*“ lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufgestellt werden. Die Normalform einer solchen Differentialgleichung ist nach S. 19:

$$(1) \quad \frac{d^n y}{d x^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{d y}{d x} + P_n(x) y = 0,$$

wo die $P_k(x)$ beliebige Functionen von x sind; zur Abkürzung soll die linke Seite der Gleichung (1) symbolisch durch $\Phi(y)$ bezeichnet werden.

Lehrsatz: *Ist y ein Integral der Differentialgleichung (1), so genügt derselben auch die Function Cy, unter dem Factor C eine beliebige Constante verstanden.*

Tritt nämlich Cy an Stelle von y, so tritt Cy' an Stelle von y', ..., und also folgt bei der Bauart der linken Seite $\Phi(y)$ von (1):

$$\Phi(Cy) = C \cdot \Phi(y).$$

Ist $\Phi(y) = 0$, d. h. ist y ein Integral von (1), so folgt auch $\Phi(Cy) = 0$, so dass Cy in der That auch ein solches ist.

Lehrsatz: *Sind $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ Integrale der Differentialgleichung (1), so ist auch:*

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad y = y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu$$

ein solches.

In Folge der Bauart der linken Seite von (1) ist nämlich:

$$\Phi(y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2) + \cdots + \Phi(y_\nu).$$

Hier sind aber sämmtliche Glieder der rechten Seite gleich 0; es ist also auch $\Phi(y) = 0$, d. h. y genügt der Gleichung (1).

Durch Zusammenfassung der beiden aufgestellten Sätze ergiebt sich als dritter

Lehrsatz: *Sind $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ irgend welche ν particuläre Integrale der Differentialgleichung (1), so genügt derselben auch die Function:*

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu,$$

wo $C_1, \ldots, C_\nu$ irgend ν Constanten bedeuten.

Hieran schliesst sich der folgende für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen fundamentale

Lehrsatz: *Es lassen sich (und zwar auf unendlich viele Weisen) n particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (1) auswählen, so dass nicht nur jede mit irgend welchen n Constanten C gebildete Function:*

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

eine Lösung von (1) darstellt, sondern dass umgekehrt „jedes“ Integral y der Differentialgleichung (1) durch $y_1, \ldots, y_n$ in der Gestalt (4) darstellbar ist.

Der Nachweis dieses Satzes, welcher weitgehende functionentheoretische Vorbereitungen erfordern würde, soll hier nicht gegeben werden.

8. Lineare homogene Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten.

Als Beispiel betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d y}{d x} + a_n y = 0$$

mit constanten Coëfficienten $a_1, \ldots, a_n$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung gelingt durch die Exponentialfunction $y = e^{\mu x}$, unter μ eine sogleich näher zu bestimmende Constante verstanden.

Setzen wir nämlich:

$$y = e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \mu e^{\mu x}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \mu^2 e^{\mu x}, \ldots$$

in (1) ein, so gewinnen wir:

$$y\,(\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n) = 0.$$

Wenn wir demnach μ als Wurzel der algebraischen Gleichung:

$$(2) \qquad \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0$$

auswählen, so wird $y = e^{\mu x}$ eine Lösung von (1) darstellen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gleichung (2) *lauter verschiedene Wurzeln* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ habe; dann gilt der

Lehrsatz: *Die homogene lineare Differentialgleichung (1) mit constanten Coëfficienten besitzt den n verschiedenen Wurzeln* $\mu_1 \ldots, \mu_n$ *der algebraischen Gleichung (2) entsprechend die n particulären Integrale:*

$$(3) \quad \ldots \quad y_1 = e^{\mu_1 x}, \; y_2 = e^{\mu_2 x}, \ldots, y_n = e^{\mu_n x},$$

in denen sich das „allgemeine" Integral in der Gestalt:

$$(4) \quad \ldots \quad y = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} + \cdots + C_n e^{\mu_n x}$$

darstellt.

Sind $a_1, \ldots, a_n$ (was hier überall als Voraussetzung gilt) reell, so können complexe Wurzeln der Gleichung (2) nach X, 1 nur paarweise conjugirt vorkommen.

Mögen etwa μ_1 und μ_2 conjugirt complex sein:

$$\mu_1 = \varkappa + i\lambda, \quad \mu_2 = \varkappa - i\lambda,$$

so kann man zur Vermeidung der „complexen" Functionen y_1, y_2 folgende reelle Functionen an ihre Stelle treten lassen:

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\varkappa x} \cos \lambda x, \\[2ex] \bar{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\varkappa x} \sin \lambda x. \end{cases}$$

In ihnen drücken sich die beiden ursprünglich gewählten particulären Integrale y_1, y_2 so aus:

$$(6) \quad \ldots \quad y_1 = \bar{y}_1 + i\bar{y}_2, \quad y_2 = \bar{y}_1 - i\bar{y}_2.$$

9. Lineare nicht-homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

Die Normalform der linearen nicht-homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist nach S. 19:

$$(1)\quad \frac{d^n y}{d x^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d y}{d x} + P_n(x)\, y = Q(x).$$

Die linke Seite dieser Gleichung bezeichnen wir wie bisher abgekürzt durch das Symbol $\Phi(y)$, so dass $\Phi(y) = Q(x)$ die gegebene Gleichung ist.

Die Gleichung $\Phi(y) = 0$ bezeichnen wir als die *zur gegebenen Differentialgleichung gehörende „homogene“ lineare Differentialgleichung.* Von letzterer denken wir n solche particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Functionen von x bereits berechnet, in denen jedes Integral von $\Phi(y) = 0$ durch

$$(2)\quad \ldots\ldots\quad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

darstellbar ist; es werden hierbei vor allem die Gleichungen gelten:

$$(3)\quad \ldots\quad \Phi(y_1) = 0,\quad \Phi(y_2) = 0, \ldots,\quad \Phi(y_n) = 0.$$

Man setze nun in (2) an Stelle der $C_1, \ldots, C_n$ n noch nicht näher bestimmte Functionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ von x ein und versuche mit der so entspringenden Function:

$$(4)\quad \ldots\quad y = \varphi_1(x)\cdot y_1 + \varphi_2(x)\cdot y_2 + \cdots + \varphi_n(x)\cdot y_n$$

von x der Gleichung (1) zu genügen.

Hierbei bemerke man, dass man über die Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ willkürlich verfügen darf, dann aber immer noch φ_n so bestimmen kann, dass y eine gewünschte Function, hier ein Integral von (1) wird. Man kann die Sachlage auch dahin aussprechen, dass man für die n Functionen φ von vornherein $(n-1)$ Bedingungen willkürlich vorschreiben darf. In diesem Sinne bestimmen wir, dass die folgenden $(n-1)$ Gleichungen bestehen sollen:

$$(5)\quad \begin{cases} y_1 \dfrac{d\varphi_1}{dx} + y_2 \dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + y_n \dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0, \\[2ex] \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_n}{dx}\dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0. \end{cases}$$

Um die unter (4) definirte Function y in (1) einzuführen, berechne man zunächst die Ableitungen $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$. Unter Rücksicht auf

die jetzt zur Geltung kommenden Gleichungen (5) findet man folgende Reihe von Gleichungen:

$$
(6) \quad \begin{cases}
y = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \cdots + \varphi_n y_n, \\
\dfrac{dy}{dx} = \varphi_1 \dfrac{dy_1}{dx} + \varphi_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \cdots + \varphi_n \dfrac{dy_n}{dx}, \\
\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \varphi_1 \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi_2 \dfrac{d^2 y_2}{dx^2} + \cdots + \varphi_n \dfrac{d^2 y_n}{dx^2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \varphi_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \dfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_n \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}.
\end{cases}
$$

Hingegen erhält man für die n^{te} Ableitung den $2n$-gliedrigen Ausdruck:

$$
(7) \quad \begin{cases}
\dfrac{d^n y}{dx^n} = \varphi_1 \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + \cdots + \varphi_n \dfrac{d^n y_n}{dx^n} + \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{d\varphi_1}{dx} + \cdots \\
\qquad + \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \dfrac{d\varphi_n}{dx}.
\end{cases}
$$

Zu dieser letzteren Gleichung addire man nun die Gleichungen (6), nachdem man sie bezw. mit $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, ..., $P_1(x)$ multiplicirt hat; es ergiebt sich unter Benutzung der Abkürzung $\Phi(y)$:

$$
(8) \quad \begin{cases}
\Phi(y) = \varphi_1 \Phi(y_1) + \cdots + \varphi_n \Phi(y_n) + \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{d\varphi_1}{dx} + \cdots \\
\qquad + \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \dfrac{d\varphi_n}{dx}.
\end{cases}
$$

In Folge von (3) verschwinden hier die n ersten Glieder rechter Hand, und es wird demnach y in der That eine Lösung der Gleichung $\Phi(y) = Q(x)$ darstellen, wenn die Gleichung gilt:

$$
(9) \quad \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_n}{dx} = Q(x).
$$

Diese Gleichung reihen wir als n^{te} den $(n-1)$ voraufgehenden Gleichungen (5) an und besitzen damit ein *System von n Gleichungen mit den n linear vorkommenden Unbekannten* $\dfrac{d\varphi_1}{dx}, \dfrac{d\varphi_2}{dx}, \cdots, \dfrac{d\varphi_n}{dx}$, wobei die Coëfficienten dieser Gleichungen $y_1, y_2, \cdots, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, Q(x)$ *bekannte Functionen von x sind.*

Wie eingehendere Untersuchungen zeigen, hat die Auflösung dieses Gleichungssystems nach $\dfrac{d\varphi_1}{dx}, \cdots$ keine Schwierigkeit, und man lernt auf diese Weise $\dfrac{d\varphi_1}{dx}, \cdots \dfrac{d\varphi_n}{dx}$ als Functionen von x kennen:

$$(10) \quad . \quad . \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = \psi_1(x), \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \psi_2(x), \cdots, \frac{d\varphi_n}{dx} = \psi_n(x).$$

Die Integration dieser n Gleichungen führt auf folgenden

Lehrsatz: *Ist das allgemeine Integral (2) der homogenen Differentialgleichung $\Phi(y) = 0$ bereits bekannt, so kann man das allgemeine Integral der vorgelegten nichthomogenen Differentialgleichung (1) durch Ausführung von n Quadraturen in der Gestalt berechnen:*

$$(11) \quad \begin{cases} y = y_1 \int \psi_1(x)\,dx + \cdots + y_n \int \psi_n(x)\,dx \\ \qquad + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten die ψ Functionen von x, welche man aus den Functionen $y_1, \ldots, y_n$ durch Differentiation und Auflösung von n linearen Gleichungen in der soeben bezeichneten Weise zu berechnen hat.

Die hier entwickelte Auflösung der linearen nichthomogenen Differentialgleichung (1) wird als die „*Methode der Variation der Constanten*" bezeichnet, insofern an Stelle der Constanten C in (2) variabele Grössen $\varphi_n(x)$ in (4) treten. Diese Methode ist von Lagrange aufgestellt.

10. Lösung von Differentialgleichungen durch unendliche Reihen. Die hypergeometrische Reihe.

Wenn man eine vorgelegte Differentialgleichung nicht durch eine bekannte Function y auflösen kann, so ist der Versuch angezeigt, eine der Differentialgleichung genügende Function y in Gestalt einer nach Potenzen von x fortscheitenden unendlichen Reihe von einfachem Bildungsgesetze anzugeben oder, wie man sagt, „*die Differentialgleichung vermöge einer unendlichen Reihe zu integriren*".

Man setzt hierbei zunächst die Reihe für y mit unbestimmten Coëfficienten an:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

berechnet hieraus $y', y'', \ldots$ und trägt diese Ausdrücke in die gegebene Differentialgleichung:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

ein.

Die so entspringende Gleichung enthält nur noch x und muss für jeden Werth von x richtig sein.

Lässt sich demnach die linke Seite der fraglichen Gleichung selbst wieder nach Potenzen von x anordnen, so wird nach einem in VII, 13 genannten Satze jeder einzelne Coëfficient dieser Reihe verschwinden.

Man gewinnt so unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ im Ansatze (1).

Die entspringende Reihe (1) wird *innerhalb ihres Convergenzbezirks* eine der Differentialgleichung genügende Function darstellen. —

Der vorstehende Ansatz soll nunmehr auf die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(3) \quad . \ . \quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(1+\alpha+\beta)x-\gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

angewandt werden, wobei α, β, γ irgend welche reelle Constanten sind, von denen jedoch die dritte γ weder gleich 0 noch gleich einer negativen ganzen Zahl sein soll.

In (3) haben wir einzutragen:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k,$$

und es muss alsdann:

$$x(x-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + [(1+\alpha+\beta)x-\gamma]\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k + \alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = 0$$

für alle Werthe x richtig sein.

Bei der Anordnung nach ansteigenden Potenzen von x wird man setzen:

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k'=2}^{\infty}k'(k'-1)a_{k'}x^{k'}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty}k'(k'-1)a_{k'}x^{k'}$$

und darf demnächst den Index am Summationsbuchstaben k' wieder unterdrücken.

Indem man mit den übrigen Gliedern der vorletzten Gleichung ähnlich verfährt, lässt sich dieselbe in folgende Gestalt überführen:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\alpha)(k+\beta)a_k - (k+1)(k+\gamma)a_{k+1}]x^k = 0.$$

Hier muss der Coëfficient jeder einzelnen Potenz x^k verschwinden, so dass wir mit Rücksicht auf die über γ gemachte Voraussetzung für die Berechnung der a_k folgende Recursionsformel gewinnen:

$$(4) \quad . \ . \ . \ . \quad a_{k+1} = a_k \cdot \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}.$$

Setzt man noch $a_0 = 1$, so sind alle weiteren a_k auf Grund von (4) eindeutig bestimmt.

Für den Quotienten zweier auf einander folgender Glieder u_{k+1} und u_k unserer Reihe finden wir:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{1 + \frac{1}{k}} \cdot \frac{1 + \frac{\beta}{k}}{1 + \frac{\gamma}{k}} \cdot x,$$

woraus wir weiter schliessen:

$$\lim_{k=\infty} \cdot \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = | x |.$$

Das Convergenzintervall (vergl. VII, 5) der erhaltenen Reihe ist somit durch $-1 < x < +1$ gegeben.

Lehrsatz: *Die homogene lineare Differentialgleichung (3) lässt sich vermöge der unendlichen Reihe:*

$$(5) \quad . \quad . \quad \begin{cases} y = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdot \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \cdots \end{cases}$$

auflösen, d. h. die durch diese Potenzreihe innerhalb ihres Convergenzintervalls $-1 < x < +1$ *definirte Function stellt ein particuläres Integral der Differentialgleichung (3) dar.* —

Die in (5) gewonnene unendliche Reihe heisst die *„hypergeometrische Reihe"*; sie wurde zuerst von Gauss ausführlich untersucht und wird nach ihm abgekürzt durch das Symbol $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ bezeichnet.

Durch geeignete specielle Auswahlen der α, β, γ kann man in $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ zahlreiche besondere Functionen, insbesondere auch elementare wiedergewinnen.

So liefert z. B. $F(1, 1, 2; x)$ mit dem Factor x versehen die aus VII, 11 bekannte Logarithmusreihe:

$$\log (1 + x) = x F(1, 1, 2; x).$$

Für $\alpha = -m$, $\beta = \gamma = 1$ gelangen wir nach Zeichenwechsel von x zur Binomialreihe (vergl. VII, 12):

$$(1 + x)^m = F(-m, 1, 1; -x).$$

$F(1/2, 1/2, 3/2; x^2)$ ergiebt, mit dem Factor x versehen, nach kurzer Zwischenrechnung die in VII, 13 aufgestellte Reihe der Function $\arcsin x$:

$$\arcsin x = x F(1/2, 1/2, 3/2; x^2).$$

Betrachten wir etwa endlich noch $F\left(m, 1, 1; \frac{x}{m}\right)$ für ein unendlich wachsendes m. Der Grenzübergang führt zur Exponentialreihe, die in VII, 9 aufgestellt wurde:

$$e^x = \lim_{m=\infty} F\left(m, 1, 1; \frac{x}{m}\right).$$

XVII. Capitel.

Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabelen.

1. Systeme simultaner Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen.

Es seien x, y, z drei reelle Variabelen, deren erste unabhängig sei, während y und z von x abhängen sollen.

Zur näheren Bestimmung dieser Abhängigkeit sollen zwei Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\right) = 0 \end{cases}$$

vorgelegt sein, in denen neben x, y, z noch die Ableitungen von y und z nach x bis zu einer gewissen Ordnung vorkommen mögen.

Erklärung: *Man sagt, durch (1) sei ein System „simultaner" Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen x und zwei gesuchten Functionen y, z gegeben; dabei soll die Anzahl der Gleichungen mit derjenigen der gesuchten Functionen gleich sein.*

Die in den beiden voraufgehenden Capiteln erörterten Definitionen und Grundprobleme wird man hier leicht übertragen.

Die höchste vorkommende Ordnung einer Ableitung liefert die *Ordnung des Systems simultaner Differentialgleichungen.*

Liegt insbesondere die *erste* Ordnung vor, so können wir durch Auflösung der beiden Gleichungen nach $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ das System in die Normalgestalt setzen:

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dy}{dx} = G_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = G_2(x, y, z).$$

Die beiden Functionen:

$$(3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = f_1(x), \quad z = f_2(x)$$

stellen ein *Lösungssystem oder ein System von Integralen der Gleichungen* (1) vor, falls

$$F_1[x, f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x), \ldots] = 0,$$
$$F_2[x, f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x), \ldots] = 0$$

zugleich in x identische Gleichungen sind.

Die in XV, 5 befolgte geometrische Methode, die Existenz von Integralen einer Gleichung $F(x, y, y') = 0$ anschaulich zu machen, lässt sich auf den Fall der Gleichungen (2) von der ersten Ordnung sofort übertragen.

Deutet man x, y, z als rechtwinklige Raumcoordinaten und denkt einen räumlichen Bereich eingegrenzt, in dem $G_1(x, y, z)$ und $G_2(x, y, z)$ eindeutige stetige Functionen sind, so geht durch jeden Punkt dieses Bereiches ein durch die Differentialgleichung selbst, nämlich durch:

$$dx : dy : dz = 1 : G_1(x, y, z) : G_2(x, y, z) \tag{4}$$

eindeutig bestimmtes Curvenelement hindurch; und alle diese Elemente werden eine *Schaar von zweifach unendlich vielen Integralcurven des Systems (2)* zusammensetzen.

Stellen wir diese Schaar zunächst durch zwei Gleichungen:

$$g_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad g_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \tag{5}$$

dar, so würde die Auflösung dieser Gleichungen explicite das System der Integrale:

$$y = f_1(x, C_1, C_2), \quad z = f_2(x, C_1, C_2) \tag{6}$$

kennen lehren; wie man sieht, bleiben hier *zwei Constanten* willkürlich wählbar. —

Diese kurzen Andeutungen mögen am folgenden Beispiele erläutert werden:

$$\frac{dy}{dx} = y + z, \qquad \frac{dz}{dx} = y - z. \tag{7}$$

Um dieses System simultaner Differentialgleichungen zu lösen, berechne man aus der ersten Gleichung:

$$z = \frac{dy}{dx} - y, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}. \tag{8}$$

Substituirt man diese Werthe für z und $\frac{dz}{dx}$ in die zweite Gleichung (7), so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0.$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nach XVI, 8 sofort gelöst werden. Nach Berechnung des allgemeinen Integrals y findet man z vermöge der ersten Gleichung (8):

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}},$$

$$z = C_1(-1 + \sqrt{2})e^{x\sqrt{2}} - C_2(1 + \sqrt{2})e^{-x\sqrt{2}}. \text{ —}$$

Endlich möge der Ansatz (1) noch für mehr als drei Variabelen formulirt werden.

Sind $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ Variabelen, von denen die erste unabhängig sei, während die n letzten von x abhängen sollen, so möge diese Abhängigkeit durch n Gleichungen:

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', y_1'', \ldots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', y_1'', \ldots) = 0 \end{cases}$$

näher festgelegt sein; hierbei ist zur Abkürzung $y_1', \ldots$ für $\frac{d y_1}{d x}, \cdots$ gesetzt.

Erklärung: *Man sagt, durch (9) sei ein System von n „simultanen“ Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen x und n gesuchten Functionen $y_1, \ldots, y_n$ gegeben.*

Die weiter sich hier anschliessenden Definitionen und Problemstellungen sind denjenigen des Falles $n = 2$ analog.

2. Partielle Differentialgleichungen mit einer gesuchten Function.

Von den drei Variabelen x, y, z seien jetzt die beiden ersten unabhängig, während z von x und y abhängig sein soll.

Es sei eine Gleichung vorgelegt:

$$(1) \quad \ldots \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \cdots\right) = 0,$$

in welcher neben x, y, z noch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots$ auftreten.

Erklärung: *Die Gleichung (1) bezeichnet man als eine partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabelen x, y und einer gesuchten Function z.*

Man spricht von einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} *„Ordnung“*, falls n die höchste vorkommende Ordnung einer Ableitung ist.

Eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung wird demnach gegeben sein durch:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Ist die linke Seite von (1) in z und den Ableitungen von z rational und ganz, so bezeichnet man die Summe der Exponenten von z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ im einzelnen Gliede als den *„Grad“* dieses Gliedes und spricht von einer *Differentialgleichung* m^{ten} *Grades*, falls m der höchste vorkommende Grad eines Gliedes ist.

Eine partielle Differentialgleichung, die *linear* und von *erster* Ordnung ist, lässt sich hiernach auf die Gestalt bringen:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad F_1(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + F_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + F_3(x,y)\,z = F_4(x,y),$$

wo die F beliebige Functionen von x und y sind.

Wir werden jetzt weiter sagen, die Function $z = f(x, y)$ stelle *eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung (1)* vor, falls die Einführung von $z = f(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \ldots$ in (1) eine *identische*, d. i. *für alle Werthepaare x, y bestehende Gleichung* liefert.

Hier treffen wir aber weit complicirtere Verhältnisse, wie wir an dem Beispiele einer beim integrirenden Factor oben aufgetretenen partiellen Differentialgleichung darthun wollen.

In der That subsumirt sich ja unter den Ansatz (3) die in XV, 14 unter (1) angegebene partielle Differentialgleichung für die daselbst mit $\mu(x, y)$ bezeichnete Function.

Aus XV, 12 geht hervor, dass, wenn $\mu(x, y)$ ein „particuläres" Integral jener Gleichung ist, auch jede Function:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_1(x, y) = \mu(x, y)\,\chi\,[h(x, y)]$$

der Differentialgleichung genügt; hierbei war $h(x, y)$ eine $\mu(x, y)$ zugehörige, durch Quadraturen zu berechnende bestimmte Function, während χ eine *gänzlich willkürlich wählbare Function* bedeutet.

Ueberdies war jede der fraglichen Differentialgleichung genügende Function in der Gestalt (4) darstellbar.

Im Ausdruck des „allgemeinen" Integrals unserer partiellen Differentialgleichung ist demnach noch eine „willkürlich zu wählende Function" enthalten.

Was an diesem Beispiel im speciellen Falle hervortrat, ist ein allgemeiner Satz. Das Analogon der willkürlichen „Constanten" bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen ist hier bei den partiellen die *willkürliche „Function"*, welche im Ausdruck des allgemeinen Integrals enthalten ist. —

Es ist hier nicht der Ort, diese Gegenstände weiter zu verfolgen. Hinzugefügt sei nur noch die Angabe, dass die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Mechanik und theoretischen Physik eine fundamentale Rolle spielen; so tritt z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

in der Theorie der Wärmeleitung, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

bei der Untersuchung der Schwingungen gespannter Saiten, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

in der Potentialtheorie auf. —

Uebrigens wird es keine Schwierigkeit machen, den Ansatz (1) auf *partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Variabelen und einer gesuchten Function* zu verallgemeinern.

Die Hereinnahme der Ansätze von Nr. 1 würde noch etwas allgemeiner auf *Systeme von n simultanen partiellen Differentialgleichungen mit m unabhängigen Variabelen und n gesuchten Functionen* führen.

REGISTER.

[1]) II, 3 heisst Capitel II, Nr. 3.